Statistique appliquée à la logistique

Pr. Mohamed El Merouani

1

Flux d'événements

Introduction:

Selon une définition moderne de la Logistique,

« c'est l'optimisation (la gestion) de l'ensemble des activités qui touchent à la fois les flux d'information et les flux physiques ou les flux d'événements »

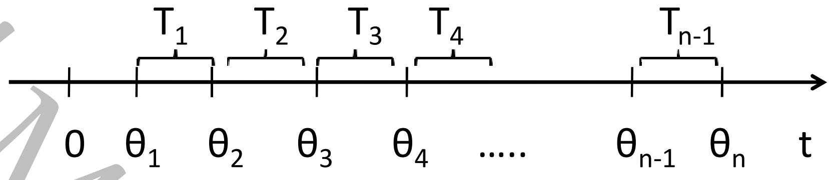
Définition et exemples:

- On appelle flux d'événements la suite des événements (phénomènes) homogènes qui se succèdent en des instants aléatoires.

Exemples:

- Flux (file) d'appels d'un central téléphonique,
- Flux d'acheteurs d'un magasin à libre service,
- Flux de défaillances d'une machine,
- Etc.

- Une représentation suggestive d'un flux d'événements est donnée par une série des points d'abscisses $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ séparés par des intervalles $T_1=\theta_2-\theta_1$; $T_2=\theta_3-\theta_2$; …;$T_{n-1}=\theta_n-\theta_{n-1}$



- Une représentation probabiliste présente un flux d'événements comme une suite des v.a. θ_1, $\theta_2 = \theta_1+T_1$, $\theta_3=\theta_2+T_2$, …

Remarque:

- Il ne faut pas confondre les événements qui forment un flux et les événements aléatoires dans le sens courant du terme.
- En particulier, il ne convient pas de parler des « probabilités » des événements qui forment un flux (une file); chacun de ces événements est caractérisé par une variable aléatoire qui est l'instant de sa réalisation sur l'axe du temps.

Densité du flux:

- L'une des premières caractéristiques d'un flux d'événements est le nombre moyen d'événements qui se produisent par unité de temps: $E[X_1]=\lambda$
- où X_1 est le nombre d'événements qui apparaissent dans l'intervalle de temps d'une durée unitaire.
- λ s'appelle densité du flux ou taux moyen de file.

Densité du flux:

- La densité du flux du système peut être aussi bien constante que variable.
- Dans ce dernier cas, elle est notée $\lambda(t)$ et est définie comme la limite du rapport du nombre moyen d'événements qui tombe dans l'intervalle élémentaire Δt adhérant au point t, à la longueur de cet intervalle, lorsque cette dernière tend vers zéro:

Densité du flux:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left[X\left(t, t+\Delta t\right)\right]}{\Delta t}$$

Où la v. a. $X(t, t+\Delta t)$ est le nombre d'événements qui tombent dans l'intervalle de t à $t+\Delta t$.

Flux d'événements permanent:

- Un flux d'événements est dit **permanent** si ses caractéristiques probabilistes ne dépendent pas du choix de l'origine du temps,
- ou d'une façon plus concrète, si **la probabilité** pour tel ou tel nombre d'événements de tomber dans un intervalle de temps quelconque ne **dépend** que de **la longueur de cet intervalle** τ et ne dépend pas de sa position sur l'axe de temps Ot.

Flux d'événements stationnaire:

- Un flux d'événements (système d'attente) est dit **stationnaire**, si **la probabilité** pour que tel ou tel nombre d'événements tombe dans l'intervalle du temps ne dépend que de **la durée de cet intervalle** et ne dépend pas de la position de ce dernier sur l'axe du temps.
- Donc **permanent = stationnaire**
- En particulier, pour un flux stationnaire sa densité est constante: **λ=cste**.

Flux d'événements stationnaire:

- **Un flux d'événements pratiquement stationnaire dans un intervalle de temps relativement court peut ne pas l'être à l'échelle d'un grand intervalle.**
- Par exemple, le flux d'appels à un standard téléphonique entre 12h et 12h30mn est pratiquement stationnaire; or au cours de 24h ce n'est pas du tout le cas (les appels de nuit sont notablement moins fréquents que ceux faits pendant la journée).

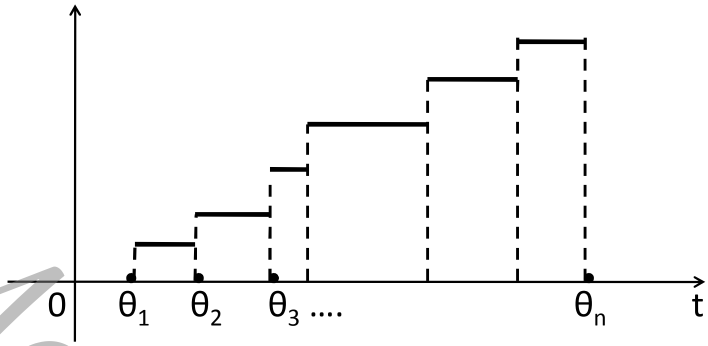
Flux d'événements **sans mémoire**:

- Un flux d'événements est dit **sans mémoire** ou **de Markov** si la probabilité de tel ou tel nombre d'événements de se produire dans un intervalle de temps donné ne dépend pas du nombre d'événements se produisant dans un autre intervalle **disjoint** quelconque.
- **En particulier, le comportement « futur » du flux ne dépend pas de la façon dont s'est arrangé son « passé » (d'où le terme de « sans mémoire »).**

Flux d'événements **ordinaire**:

- Un flux d'événements est dit **ordinaire** si la probabilité pour **deux et plus** d'événements de tomber dans un intervalle de temps élémentaire Δt est **négligeable** par rapport à la probabilité correspondante pour **un seul** événement.
- Pratiquement, cela signifie que les événements du flux du système d'attente se présente sur l'axe du temps un à un et non pas par groupes de 2, de 3, etc.

- Un flux d'événements ordinaire peut être interprété comme un processus stochastique X(t) qui est le nombre d'événements survenus jusqu'à l'instant t.



- Le processus stochastique X(t) croît par saut d'une unité aux points θ_1, θ_2, θ_3,…, θ_n, …

Flux d'événements simple:

- On dit qu'un flux d'événements est **simple** s'il est **permanent**, **ordinaire** et **sans mémoire**.

simple= stationnaire+ ordinaire + de Markov

- L'intervalle de temps T entre deux événements voisins d'un flux simple suit la loi de probabilité exponentielle,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (pour \ \ t > 0)$$

où $\lambda = \dfrac{1}{E(T)}$ est une quantité inverse à la valeur moyenne de l'intervalle T.

Flux d'événements de Poisson:

- Un flux d'événements ordinaire, sans mémoire est dit de Poisson.
- Si de plus il est stationnaire, il s'appelle flux stationnaire de Poisson ou flux simple.
- Un flux simple présente un cas particulier de flux de Poisson (notamment, un flux de Poisson stationnaire).

Poisson = ordinaire + de Markov

⇨ Poisson + stationnaire = simple

Flux d'événements de Poisson:

- Si les événements forment un flux simple, le nombre X d'événements qui tombent dans un intervalle de temps quelconque de durée τ se répartit d'après la loi de Poisson:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

où $a=\lambda\tau$ est l'espérance mathématique du nombre d'événements produit pendant cette durée.

Flux d'événements de Poisson:

- La formule précédente reste valable également pour le cas du flux de Poisson non stationnaire avec $\lambda=\lambda(t)\neq$cste, à cette différence près que le paramètre a se calcule d'après la formule:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$$

où t_0, $t_0+\tau$ sont les coordonnées des extrémités de l'intervalle.

Flux récurrent ou de Palma:

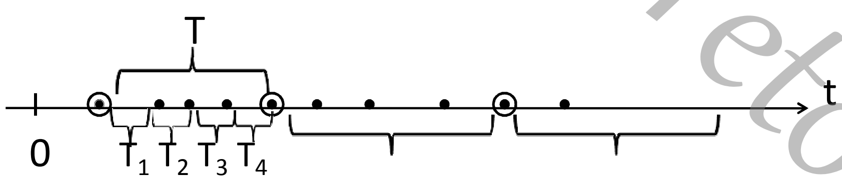
- Un flux d'événements ordinaire s'appelle flux de Palma (ou flux récurrent) si les intervalles de temps T_1, T_2, … entre les événements successifs constituent des variables aléatoires indépendantes de même loi de répartition.
- Les répartitions de T_1, T_2, … étant identiques, le flux de Palma est toujours stationnaire.
- Le flux simple est un cas particulier du flux de Palma; les intervalles entre les événements y sont répartis d'après la loi exponentielle où λ est la densité du flux.

Flux d'Erlang:

- On appelle flux d'Erlang d'ordre k le flux d'événements qui s'obtient par « tamisage » d'un flux simple, lorsqu'on conserve dans un flux chaque $k^{\text{ième}}$ point (événement), alors que tous les points intermédiaires sont rejetés.

- La figure suivante illustre l'obtention du flux d'Erlang d'ordre 4 à partir d'un flux simple.

Flux d'Erlang:



- L'intervalle de temps entre deux événements voisins d'un flux d'Erlang d'ordre k constitue une somme de k v.a. indépendantes T_1, T_2, …, T_k, qui suivent la loi exponentielle de paramètre λ:

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i$$

Flux d'Erlang:

- La loi de répartition de la v.a. T s'appelle Loi d'Erlang d'ordre k qui possède la fonction de densité de probabilité

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \qquad (pour\ t > 0)$$

- L'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de T sont respectivement:

$$E(T) = \frac{k}{\lambda}; \quad Var(T) = \frac{k}{\lambda^2}; \quad \sigma(T) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}$$

Flux d'Erlang:

- Le coefficient de variation de la v.a. T s'écrit:

$$c_v = \frac{\sigma(T)}{E(T)} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- $c_v \to 0$ lorsque $k \to \infty$, c'est-à-dire qu'avec l'augmentation de l'ordre d'un flux d'Erlang, le « degré d'aléarité » de l'intervalle entre les événements tend vers zéro.