Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2011/2012
LP Informatique de Gestion
Semestre : Cinquième (S5)

Contrôle de Programmation Mathématique

Durée : 2 heures

Problème n°1 :

Un industriel doit livrer trois biens A, B et C à raison de 6 unités de A, 11 unités de B et 23 unités de C. Il dispose de deux facteurs de production X et Y. L'emploi d'une unité de X permet de réaliser une unité de A, une de B et une de C. Une unité de Y permet de réaliser une unité de A, 2 de B et 5 de C. Le prix du facteur X est de 1000 DH l'unité, celui du facteur Y de 4000 DH.

Quelle quantité de chaque facteur l'industriel doit-il utiliser pour satisfaire la demande à un coût minimal ? (Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire).

Problème n°2 :

Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\text{Min } Z = x - y$$

$$\text{Sujet à} \quad \begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ -0{,}5x + y \leq 4 \\ -2x + y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Problème n°3 :

Résoudre par la méthode du simplexe le programme linéaire suivant :

$$\text{Max} \quad Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{Sujet à} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Problème n°4 :

1. Utilisez soit la méthode des deux phases, soit l'algorithme dual du simplexe pour résoudre ce programme linéaire :

$$\text{Min} \quad Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Sujet à} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Quel est l'intervalle de variation post-optimale du coût marginal de la variable x_2 ?

Bon courage !

Problème n° 1

Activités		Amplitudes
quantité du facteur à utiliser le facteur X	$\longrightarrow$	x
Y	$\longrightarrow$	y

Fonction objective :

$$\text{Min } Z = 1000x + 4000y$$ 1 pt

Contraintes :

$x + 2y \leq 6$ (A) 1 pt

$x + 2y \leq 11$ (B) 1 pt

$x + 5y \leq 23$ (C) 1 pt

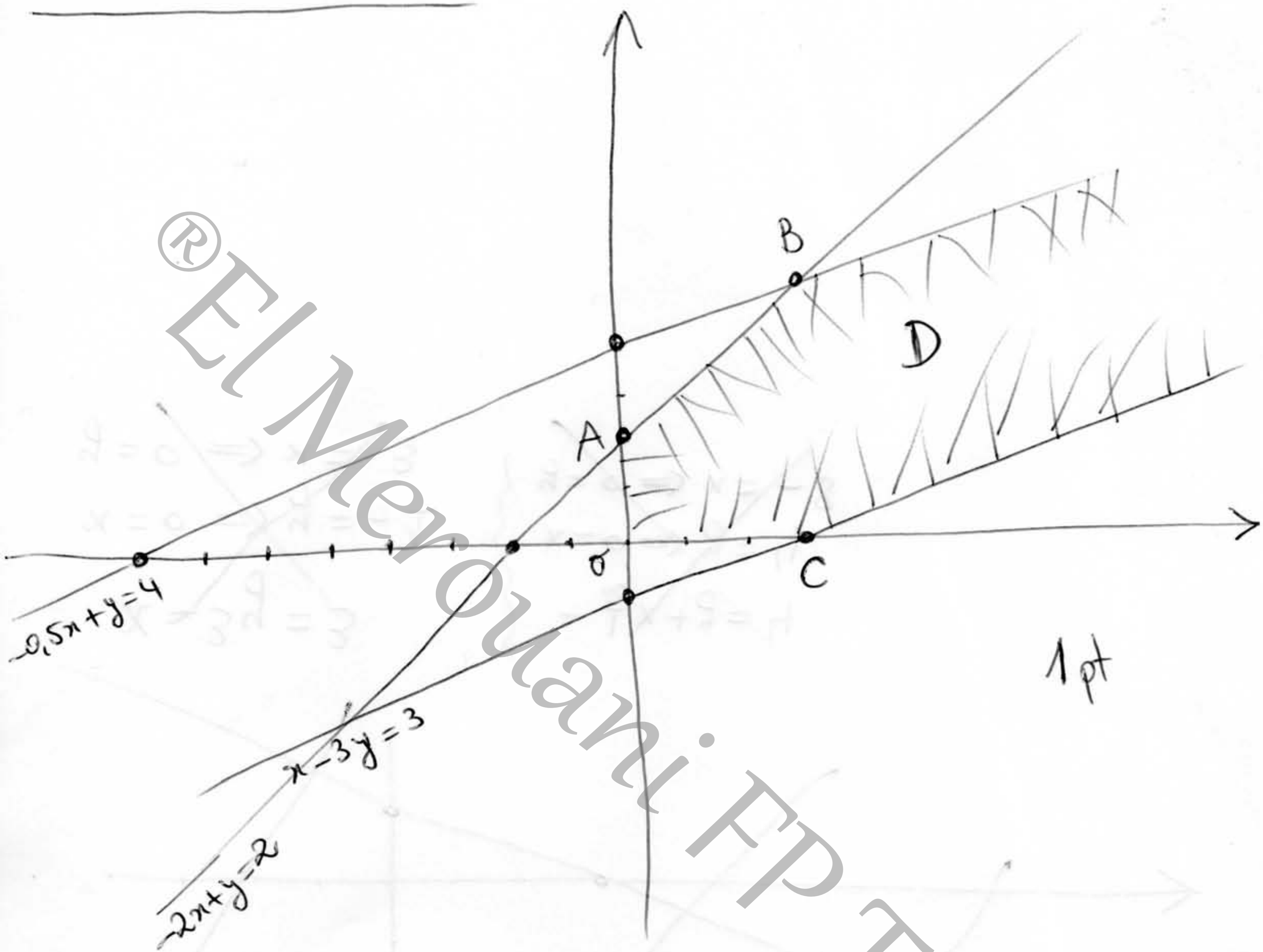
$x, y \geq 0$

D'où le modèle :

$$\text{Min } Z = 1000x + 4000y$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + 2y \leq 11 \\ x + 5y \leq 23 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Problème n° 2



1 pt

$x - 3y = 3$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

$y = 0 \Rightarrow x = 3$

$-\frac{1}{2}x + y = 4$

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$y = 0 \Rightarrow x = -8$

$-2x + y = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow x = -1$

Les points extrêmes sont $O(0,0)$; $A(0,2)$; $B(x,y)$ et $C(3,0)$

1 pt

Il s'agit de minimiser $Z = x - y$

$Z(O) = 0$ $\qquad$ $Z(C) = 3$

$Z(A) = -2$

Cherchons les coordonnées de B :

$$\begin{cases} -2x + y = 2 & ① \\ -\frac{1}{2}x + y = 4 & ② \end{cases} \Rightarrow^{②-①} \left(-\frac{1}{2} + 2\right)x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$$ 1 pt

$$① \Rightarrow y = 2 + 2x = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

alors, $Z(B) = \frac{4}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{10}{3} \simeq -3{,}33\ldots$

D'où le minimum de Z est atteint en ce point

$B\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$ où $Z = -\frac{10}{3}$ 1 pt

$\frac{4}{3} = 1{,}33$ $\qquad$ $\frac{14}{3} = 4{,}67$

Problème n°3 :

$$\text{Min } Z = -x_1 - 2x_2 - x_3$$

s.à
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 6$$
$$x_1 - x_6 = 2$$
$$x_i \geq 0$$

V.e

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
x_4	1	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	4
x_5	0	1	1	0	1	0	0	6
x_6	1	0	0	0	0	-1	0	2
$-Z$	-1	-2	-1	0	0	0	1	0

V.e

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
x_2	1	1	0	1	0	0	0	4
x_5	-1	0	1 (pivot)	-1	1	0	0	2
x_6	1	0	0	0	0	-1	0	2
$-Z$	1	0	-1	2	0	0	1	8

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
x_2	1	1	0	1	0	0	0	4
x_3	-1	0	1	-1	1	0	0	2
x_6	1	0	0	0	0	-1	0	2
$-Z$	0	0	0	1	1	0	1	10

N P

Méthode des deux phases :

Problème n° 4

1)

$$\text{Min } 2x_1 + x_2$$

Sujet à $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Soit t_1 et t_2 variables artificielles

$$4x_1 + x_2 - x_3 + t_1 = 8$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + t_2 = 5$$

1 pt

Soit $M = t_1 + t_2$

$$t_1 = 8 - 4x_1 - x_2 + x_3$$
$$t_2 = 5 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$\Rightarrow M = 13 - 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4$$

Phase I :

$$\text{Min } M = -5x_1 - 2x_2 + x_3 + \cancel{x_4} + 13$$

Sujet à $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + t_1 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 + t_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - Z = 0 \\ x_i \geq 0 \;;\; t_j \geq 0 \end{cases}$

V.e

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
V.P t_1	$\boxed{4}$ pivot	1	-1	0	1	0	0	0	8
t_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	5
$-Z$	2	1	0	0	0	0	1	0	0
$-M$	-5	-2	1	1	0	0	0	1	-13

1 pt

V.e

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-z$	$-M$	T.d.
x_1	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	2
V.s t_2	0	$\boxed{\frac{3}{4}}$ pivot	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	3
$-z$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-4
$-M$	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	0	0	1	-3

1 pt

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-z$	$-M$	T.d.
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	4
$-z$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	-6
$-M$	0	0	0	0	1	1	0	1	0

1 pt

$M = 0 \Rightarrow$ l'ensemble des solutions est non vide
solution de base réalisable est $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
$x_3 = x_4 = 0$ (V.H.b)

1 pt

Phase II :

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-z$	T.d.
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	4
$-z$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	-6

les coeff. de la dernière ligne sont ≥ 0, on est à l'opt

Méthode duale.

$$\text{Min } Z = 2x_1 + x_2$$

Sujet à $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$ 1pt

$$-4x_1 - x_2 + x_3 = -8$$
$$-x_1 - x_2 + x_4 = -5$$

v.e

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d
v.p x_3	-4 pivot	-1	1	0	0	-8 ←
x_4	-1	-1	0	1	0	-5
$-Z$	2	1	0	0	1	0

1pt

8

V.b.	x_1	x_2 V.C	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_1	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	2
V.P x_4	0	$-\frac{3}{4}$ pivot	$-\frac{1}{4}$	1	0	-3 ←
$-Z$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	-4

1pt

V.b	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_1	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	1
x_2	0	1	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$+4$
$-Z$	0	0	$1/3$	$2/3$	1	-6

1pt

2°)

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_1	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	1
x_2	0	1	$1/3$	$-4/3$	0	4
$-Z$	0	δ	$1/3$	$2/3$	1	-6

1pt

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d
x_1	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	1
x_2	0	1	$1/3$	$-4/3$	0	4
$-Z$	0	0	$\frac{1}{3}-\frac{\delta}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{4\delta}{3}$	1	$-6-4\delta$

il faut que $\frac{1}{3} - \frac{\delta}{3} \geqslant 0$

$\Rightarrow 1 \geqslant \delta \geqslant 0$ $\quad 1\,p^{t}$

ou $\boxed{0 \leqslant \delta \leqslant 1}$