Statistique appliquée à la logistique

Pr. Mohamed El Merouani

1

Files d'attente

2

Introduction:

Définition:

On appelle système d'attente tout système prévu pour satisfaire certaines demandes présentées à des instants aléatoires.

Exemples:

- des guichets d'un établissement bancaire,
- les urgences dans un hôpital,
- un poste de péage sur une autoroute,
- des opérations de déchargements de camions arrivant à un entrepôt,
- etc.

Objectif:

La théorie des phénomènes d'attente a pour objet l'étude des processus stochastiques qui se déroulent dans le systèmes d'attente.

Diversité de types de files d'attente:

- Les files d'attente diffèrent les unes des autres essentiellement par les caractéristiques des arrivées des demandes dans le systèmes ainsi que par les façons de rendre le service demandé.

Caractéristique d’une file d’attente:

Une file d’attente est caractérisée par:

1. La nature de la population (finie ou infinie)
2. Organisation du service (nombre de postes de services et leurs vitesse de traitement)
3. Capacité du système d’attente (nombre de places, limité ou illimité)
4. Discipline de service (FIFO, LIFO, etc.)

Notation de KENDALL A/B/m/n/E

- **A**: statistique du processus d’arrivé (M=de Markov, D= déterministe, G=générale)
- **B**: statistique des lois de service (M=de Markov, D= déterministe, G=générale)
- **m**: nombre de postes de services
- **n**: nombre de clients dans le système
- **E**: discipline de service.

Exemples de files d'attente:

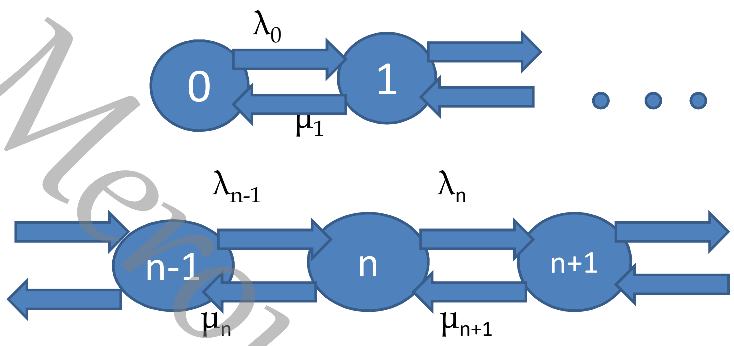
- M/M/1 = inter-arrivées et services indépendants et exponentiels, un seul serveur, les autres paramètres étant donnés par défaut
- M/M/k=Les k serveurs sont identiques : si un client arrive et trouve un serveur libre, il l'occupe. Si tous les serveurs sont occupés, il attend.
- M/M/∞=Il n'y a plus d'attente : il y a toujours un serveur disponible.
- M/M/s/s=La capacité est limitée au nombre de serveurs : les clients sont jetés du système si tous les serveurs sont occupés

Files d'attente:

- La population de la file d'attente évolue comme un processus de saut markovien...
- nous nous limitons au cas où il n'y a que des sauts vers deux valeurs voisines :
  - naissance ou arrivée (la population augmente de 1)
  - mort ou départ (la population diminue de 1)

Files d’attente:

λ_n est le taux de naissance (ou d'arrivée) et μ_n le taux de mort (ou de départ).



Files d’attente, exemple simple: La file M/M/1

- Les clients arrivent dans une file à un seul serveur et reçoivent chacun leur tour un service d'une certaine durée
- Si un client trouve le serveur libre, il reçoit immédiatement son service, sinon il attend son tour
- Les clients arrivent un par un selon un processus de Poisson = le temps séparant deux arrivées est une variable exponentielle de paramètre λ.

Files d'attente, exemple simple: La file M/M/1

- La durée du service donné à chaque client est une variable exponentielle de paramètre μ.
- Ces différentes variables aléatoires sont indépendantes dans leur ensemble.
- La capacité de la file d'attente est infinie et la discipline de service est PAPS (FIFO) premier arrivé - premier servi.

Définition des paramètres:

- L'intervalle de temps entre deux arrivées est une loi exponentielle de paramètre λ signifie que l'inter-arrivée est de durée moyenne $1/\lambda$ et donc que le nombre moyen de clients qui arrivent par unité de temps est λ.
- La durée du service est une loi exponentielle de paramètre μ signifie que le service est de durée moyenne $1/\mu$ et donc que le nombre moyen de clients qui sortent par unité de temps est μ quand le serveur est occupé.

Description de la file d'attente:

- Soit N(t) = n >0 le nombre de clients à l'instant t (ils sont en train d'attendre ou d'être servis)
- Le temps qui sépare t de la prochaine arrivée suit une loi exponentielle de paramètre λ ; de même le temps résiduel de service du client en train d'être servi suit une loi exponentielle de paramètre μ.
- propriété d'absence de mémoire du processus de Poisson.

Description de la file d'attente:

- Le prochain événement modifiant la file d'attente survient au bout d'un temps aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$
- C'est une arrivée avec la probabilité $\lambda/(\lambda+\mu)$
- C'est un départ avec la probabilité $\mu/(\lambda+\mu)$
- N(t) est un processus de naissance et de mort dans lequel $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$ pour tout n

Comportement asymptotique d'une file d'attente:

- Que se passe-t-il quand t croît...
- Processus de naissance pure : explosion !
- Processus de naissance et de mort : caractérisation difficile...
  - si le processus, partant d'un état donné, a une probabilité non nulle de ne jamais y retourner, il est dit transitoire. La taille de la population tend vers l'infini
  - si le processus, partant d'un état donné, y revient nécessairement au bout d'un temps fini en moyenne, il est dit récurrent positif : il converge en loi vers une situation d'équilibre stationnaire

Files d'attente: conclusion

- Modélisation réaliste des systèmes... Mais résolution mathématique parfois difficile !
- La file M/M/1 avec ses hypothèses de Markov fournit une évaluation correcte... Et sa résolution est très facile
- Pour des situations trop complexes, les outils de simulation peuvent apporter des informations sur le comportement du système