# Statistique appliquée à la logistique

Pr. Mohamed El Merouani

1

## Gestion des Stocks

2

## Gestion aléatoire des Stocks:

- La demande d'un bien peut être unique ou répétitive, constante ou variable (dans le cas répétitif), certaine ou aléatoire, discrète ou continue. Les modèles de gestion de stock se construisent selon le type de demande concerné.
- Pour les stocks de fabrication, on considère en général que la demande est certaine. Mais pour les stocks de distribution, la demande est aléatoire.





## Gestion aléatoire des Stocks:

- Alors, on modélise le comportement de celle-ci par une loi de probabilité. Pour déterminer cette loi de probabilité, d'abord on détermine est-ce que la loi est discrète ou continue. Après, et à partir des représentations graphiques de la demande, on peut réaliser des tests statistiques pour déterminer la loi qui s'ajuste mieux aux observations.
- Les historiques de la demande et d'autres informations (comme les prévisions des ventes pour les périodes futures) peuvent intervenir dans le choix de la loi de probabilité.

## Gestion aléatoire des Stocks:

- Une demande répétitive certaine peut être variable sans que cela entraîne des difficultés au niveau de la gestion des stocks du fait même de la certitude des demandes futures.
- Dans un contexte d'incertitude, la variabilité de la demande se traduit par le changement des paramètres de la loi de probabilité dans le temps.
- Dans un contexte où la demande est très variable d'une période à l'autre, les stocks joueront pleinement leur rôle régulateur. Ils permettent en particulier de compenser la faible flexibilité du facteur travail.



## Les déterminants du stock de sécurité:

- On appelle point de commande (noté $S_c$) le niveau de stock à partir duquel une commande est déclenchée.
- On appelle stock de sécurité (noté $S_s$) le niveau de stock durant le délai de livraison.
- Nous noterons $L$ le délai de livraison et $D_L$ la demande pendant ce délai.

- Pour préciser la notion de stock de sécurité, il convient de distinguer deux cas:
- Si les ventes sont différées en cas de rupture, le stock de sécurité $S_s$ est égal $S_c$-$D_L$

$$\boxed{S_s=S_c-D_L}$$

- $S_s$ peut donc prendre des valeurs négatives puisque la demande $D_L$ peut être supérieure au point de commande $S_c$.



- Cette hypothèse constitue une simplification dans le sens suivant: les ventes sont différées, ce qui implique que les unités correspondantes seront livrées dés réception du lot suivant.
- Par conséquent l'entreprise ne supportera pas le coût de détention de ces unités.
- Lorsque les ventes sont perdues, la demande est modifiée; elle se définit comme une v.a. $D'_L$ présentant les caractéristiques suivantes:

$$D'_L = \begin{cases} D_L & si \quad D_L < S_C \\ S_C & si \quad D_L \geq S_C \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire $D'_L = Min(D_L, S_C)$.

• Le stock de sécurité est alors égal à $S_C - D'_L$ et il est toujours positif ou nul.

• Lorsque la demande et le délai sont aléatoire, alors le coût de rupture lui-même devient aléatoire.





- Par conséquent, deux éléments essentiels interviennent dans ce type d'analyse:
  - d'une part le coût supporté lorsqu'il y a effectivement une rupture (vente perdue, procédure spéciale de livraison lorsque la vente est différée, etc…)
  - et d'autre part la probabilité qu'un tel événement survienne.

- Cette probabilité dépend à son tour de deux éléments:
  - la probabilité que la demande dépasse le stock actuel,
  - la probabilité que la demande suivante (ou le lot de production) soit livrée après épuisement du stock actuel.
- L'évaluation de ces différentes probabilités suppose des hypothèses sur les lois suivies par les deux v.a. que sont la demande et le délai ($D_L$ et $L$).



- De manière générale, les lois classiques utilisées dans ce domaine se caractérisent par un ou deux paramètres (l'espérance et la variance).
- La variabilité de la demande est classiquement représentée par la variance de la loi de demande ou, ce qui est équivalent par son écart-type.
- Il y a une relation entre stock de sécurité et variance de la loi de demande car en cas de forte variance, des ruptures de stocks sont plus fréquentes.

- Donc lorsque cette variance est élevée, un stock de sécurité plus important est nécessaire pour limiter le nombre de ruptures.
- De manière schématique, on peut résumer les différents éléments ci-avant en dressant la liste des déterminants du stock de sécurité:
  a) Les coûts de rupture
  b) Les coûts de détention
  c) La variabilité de la demande
  d) La variabilité des délais de livraison.
- En fait a) et b) ne peuvent être dissociés; un coût de rupture n'est pas élevé « en soi » mais simplement comparé au coût de détention (et réciproquement) car la détermination du point de commande résulte essentiellement de la comparaison de ces deux types de coûts.



## Lois de probabilité de la demande:

- Lorsque la demande $D$ et le délai de livraison (ou de production) sont des v.a., alors la demande $D_L$, les dates et durées de rupture de stocks éventuelles et les coûts de détention deviennent eux-mêmes aléatoires.
- En effet, le niveau des stocks à un instant $t$ quelconque n'est plus connu avec certitude.

- Dans un modèle dit “à point de commande”, une rupture peut survenir uniquement pendant le délai de livraison; c’est donc la variable $D_L$ qui importe ici.
- Cependant dans un souci de simplification, nous supposerons que $D_L=D.L$ où $L$ est exprimé en fraction d’année (si l’année est la période de référence).
- Cette hypothèse suppose en fait que la demande est régulière dans le temps et qu’en particulier elle se comporte de la même façon pendant le délai L que pendant le reste de l’année.



- Si le délai $L$ est d’une semaine, cette hypothèse implique que $D_L$ suit la même Loi de probabilité que $D/52$ et que les demandes hebdomadaires sont indépendantes.
- Dans la détermination du point de commande, deux paramètres essentiels interviennent, l’espérance $E(D_L)$ et l’écart-type (ou la variance) $\sigma(D_L)$ (ou $Var(D_L)$).
- La v.a. $D_L$ représentant la demande peut être discrète ou continue.

- Dans le cas discrèt, nous supposons que la variable $D_L$ prend $N$ valeurs ($N$ peut éventuellement être infini) $d_1, d_2, \ldots, d_N$.
- Son espérance est:

$$E(D_L) = \sum_{i=1}^{N} d_i \times P(D_L = d_i)$$

- de variance:

$$Var(D_L) = \sum_{i=1}^{N} \left(d_i - E(D_L)\right)^2 \times P(D_L = d_i)$$

- et de fonction de répartition

$$F(x) = P(D_L \leq x) = \sum_{d_i \leq x} P(D_L = d_i)$$



- Dans le cas continue, la demande $D_L$ possède une densité $f$.
- Son espérance est:

$$E(D_L) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

- de variance:

$$Var(D_L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(D_L)\right)^2 \cdot f(x) dx$$

- et de fonction de répartition:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$$

- Si $D_L$ est la demande pendant le délai de livraison et $S_C$ le point de commande, l'événement "une rupture de stock se produit" n'est rien d'autre que l'événement $\{D_L > S_C\}$; en conséquence la probabilité de rupture s'écrit: $P(D_L > S_C) = 1 - F(S_C)$.
- Comme précédemment, si $D_L$ est discrète, on aura:

$$P(D_L > S_C) = \sum_{d_i > S_C} P(D_L = d_i)$$

- Si par contre $D_L$ possède une densité *f*, l'expression correspondante est:

$$P(D_L > S_C) = \int_{S_C}^{+\infty} f(t)\,dt$$



- De manière analogue, lorsqu'on cherche à évaluer un coût de rupture moyen (une espérance), il faut connaître le nombre moyen d'unités non livrées et appliquer le coût unitaire de rupture à ce nombre (que nous noterons $E(N_n)$). On alors:

$$E(N_n) = \sum_{d_i > S_C} (d_i - S_C) \times P(D_L = d_i)$$ (dans le cas discret)

$$E(N_n) = \int_{S_C}^{+\infty} (x - S_C) f(x)\,dx$$ (dans le cas continue)

- On peut noter que $N_n$ joue un rôle différent selon le comportement supposé de la clientèle en cas de rupture.
- Si les ventes sont simplement différées, il s'agit du nombre moyen d'unités qui seront livrées dés réception de la prochaine livraison du fournisseur ou dés la mise à disposition du prochain lot de production.
- Dans le cas où les ventes sont perdues, $N_n$ est le nombre moyen de ventes manquées et la demande peut alors être considérée comme nulle pendant la période de rupture.



## Lois usuelles de la demande:

- Les lois de probabilités les plus utilisées dans le domaine de la gestion de stocks sont la loi de Poisson et la loi normale.
- La loi de Poisson est une loi discrète qui présente la particularité d'avoir une espérance et une variance égales à son paramètre λ.
- Cette propriètè est utilisée lorsqu'on cherche à tester si une v.a. suit cette loi (on calcule alors la moyenne et la variance d'un échantillon de cette variable pour opérer la comparaison).

- La loi normale est sans doute la plus utilisée des lois continues.
- Dans notre contexte, la modélisation de la demande par une v.a. suivant une loi normale pose cependant un problème (au moins sur le plan théorique); une variable normale, quelles que soient les valeurs de ses paramètres $\overline{x}$ et σ, a une probabilité non nulle de prendre des valeurs négatives.

Mohamed El Merouani 23

- En conséquence, on supposera souvent que la demande d'un produit est normale lorsqu'elle porte sur un grand nombre d'unités et qu'elle est répartie symétriquement par rapport à la moyenne.
- Lorsque cette symétrie n'est plus vérifiée, une solution alternative consiste à modéliser la demande par une loi exponentielle négative qui se caractérise par un écart-type égal à l'espérance.

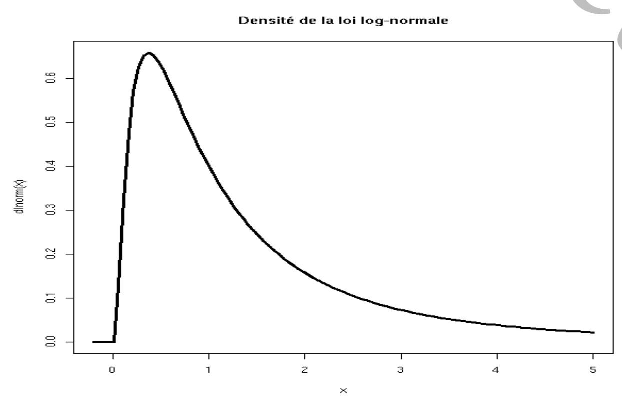
Mohamed El Merouani 24

- D’abord, on l’applique pour modéliser la demande, en gestion de stock, lorsque la symétrie n’est pas vérifiée et lorsqu’on remarque que son écart-type est égal à son espérance (sa moyenne).
- Mais en général, la loi exponentielle (négative) s’applique pour modéliser les phénomènes de désintégration. La v.a. X est alors la durée de vie du phénomène.

Mohamed El Merouani 25

## Conclusion:

- Une alternative des Lois de probabilités pour modéliser la demande en gestion de stock, lorsque la symétrie n’est pas vérifiée est la Loi Lognormale.
- La loi lognormale a la propriete d'etre asymetrique et etalee vers la droite.



# Conclusion:

- Considérer la demande suivant une loi de probabilité lognormale à trois paramètres, avec $S_C$ comme le paramètre seuil.
- Modéliser la demande par des processus stochastiques au lieu de le faire par des simples lois de probabilités.