Simulation par la méthode de rejet

Prof. Mohamed El Merouani
http://elmerouani.jimdo.com
e-mail: m_merouani@yahoo.fr

Exemple d'introduction:

- On considère une urne n°1 qui contient 6 boules numérotées {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- On réalise l'expérience suivante: On extrait une boule par hasard de l'urne, on note son numéro, on la remet dans l'urne et on mélange les boules avant d'extraire la boule suivante.
- Ce schéma s'appelle « échantillonnage avec remise »

Exemple d'introduction:

- Soit X_i le résultat (le numéro de la boule) de la $i^{ème}$ extraction.
- Comme l'échantillonnage se fait avec remise, les tirages sont indépendantes (le résultat d'une extraction n'influe pas sur le résultat des autres).
- X_i est évidemment uniforme avec fonction de probabilité $P(X_i=x_i)=1/6$, para $x_i=1,\ldots, 6$ et $i=1,\ldots,N$, où N est le nombre de tirages (la taille de l'échantillon).

Exemple d'introduction:

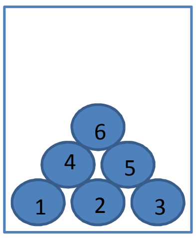
- Pour simplifier, on représente $P(X_i=x_i)$ par $p(x_i)$.
- Dans ce cas, la fonction de probabilité conjointe, $p(x)$, de $X=\{X_1,\ldots, X_n\}$, est le produit des probabilités marginales, c'est-à-dire:

$$p(x)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i)$$

Exemple d'introduction:

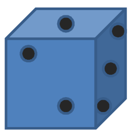
- Une forme équivalente d'obtenir un échantillon de taille N avec remise de l'urne n°1 est par le jet d'un dé N fois.
- Soit X le numéro de la boule tirée par hasard de l'urne n°1 et Y le numéro observé après jet du dé.
- Alors Y a la même fonction de probabilité que X.
- Soit $p(x)$ la fonction de probabilité de X et $h(y)$ la fonction de probabilité de Y; alors $p(x)=h(y)$.

Exemple d'introduction:



Urne n°1

x	p(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



Le dé

x	h(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Extraire N boules avec remise de l'urne n°1 peut être simulé par le lancement du dé N fois

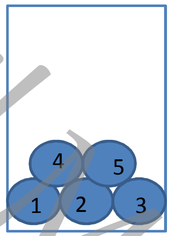
Exemple d'introduction:

- Il est maintenant important de distinguer entre la fonction de probabilité $p(x)$ (générer par l'urne n°1) et la fonction de probabilité $h(y)$ (générer par le dé).
- La loi de X, de laquelle on veut obtenir un échantillon, est la loi de la population. Alors que la loi de Y s'appelle la loi simulée, parce qu'elle est utilisée pour générer (simuler) l'échantillon.

Exemple d'introduction:

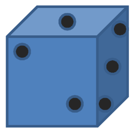
- Dans ce cas, la loi simulée est la même que celle de la population. Mais, ce n'est toujours le cas comme on va voir.
- Dans la suite, on considérera l'urne n°2, qui contient seulement cinq boules numérotées {1,2,3,4,5}.
- Soit X le numéro de la boule tirée par hasard et avec remise de l'urne n°2. Alors X est une v.a. de fonction de probabilité $p(x)$.

Exemple d’introduction:



Urne n°2

x	p(x)
1	0,2
2	0,2
3	0,2
4	0,2
5	0,2
6	0,0



Le dé

x	h(x)	s(x)
1	1/6	1,2
2	1/6	1,2
3	1/6	1,2
4	1/6	1,2
5	1/6	1,2
6	1/6	0,0

Exemple d’introduction:

- Dans ce cas, la loi simulée (le dé) n’est pas la même que la loi de la population (l’urne n°2), c’est-à-dire, $p(x) \neq h(x)$.
- Même si l’urne n°2 et le dé n’ont pas la même loi, on peut encore utiliser le dé pour simuler l’extraction des boules de l’urne n°2, mais il faut corriger par le fait que les deux lois diffèrent.

Exemple d'introduction:

- Une façon pour tenir compte de cette différence est la suivante: lorsque le dé montre le numéro 6, on ignore le lancement et on répète de nouveau jusqu'au l'apparition d'une valeur inférieure que 6, dans ce cas on prend y égale au numéro sortie et on considère y comme valeur généré de la population $p(x)$.

Exemple d'introduction:

- Cet exemple est en réalité un cas particulier du méthode connue comme méthode d'acceptation-rejet.
- Les fondements théoriques se présente dans le théorème suivant, dû à Von Neumann (1951).

Méthode d'acceptation-rejet (Théorème):

Soit X une v.a. de fonction de probabilité $p(x)$. Supposons que $p(x)$ peut être exprimée comme $p(x)=c\ g(x)\ h(x)$,

où $c\geq 1$, $0\leq g(x)\leq 1$ et $h(x)$ est une fonction de probabilité.

Soit U une v.a. uniforme $U(0,1)$ et soit Y une v.a. de fonction de probabilité $h(y)$ indépendante de U. Alors, la fonction de probabilité conditionnelle de Y sachant que $u\leq g(y)$ coïncide avec la fonction de probabilité de X. D'autre part, la probabilité d'accepter l'échantillon est $1/c$.

Exemple d'introduction:

- Dans le cas de l'urne n°2, on peut écrire $p(x)=cg(x)h(x)$, où $p(x)$ et $h(x)$ comme dans le schéma, $c=6/5$ et

$$g(x)=\begin{cases}0, & si\ \ x=6\\ 1, & autrement\end{cases}$$

- Ainsi, en appliquant le théorème précédent, on peut obtenir un échantillon de $p(x)$ (urne n°2) en utilisant $h(x)$ (le dé) et vérifiant la condition $u\leq g(x)$ pour toute valeur de x que se génère de $h(x)$, où u est un nombre obtenu de la loi uniforme $U(0,1)$.

Exemple d'introduction:

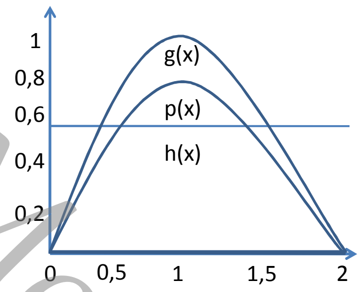
- Par conséquent, dans ce cas, l'événement x=6 est toujours rejeté, puisque g(6)=0, et les événements qui restent sont toujours acceptés.

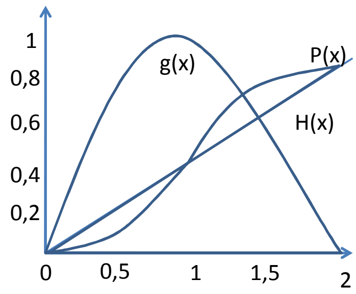
Exemple n°2:

- Supposons que $p(x)=3x(2-x)/4$, $0 \le x \le 2$ et que l'on veut obtenir un échantillon de taille N d'une population avec fonction de densité $p(x)$.
- Dans ce cas, $p(x)$ peut s'écrire $p(x)=c\ g(x)\ h(x)$, où $h(x)=1/2$, $0 \le x \le 2$, $g(x)=x(2-x)$ et $c=3/2$.
- La fonction de répartition de h est:

$$H(x) = \int_0^x h(x)dx = \int_0^x \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}$$

Exemple n°2:





Exemple n°2:

- La fonction $h(x)$ est plus facile à simuler que la fonction $p(x)$ de fonction de répartition $P(x)$.
- On suppose que l'on génère un nombre aléatoire y de $h(y)$ et un nombre aléatoire u de $U(0,1)$. On calcul $g(y)$, et si $u \leq g(y)$, on accepte y comme nombre provenant de $p(x)$.
- Autrement, on rejette u et y, et on répète le processus de nouveau.

Exemple n°2:

- Par exemple, si y=1,5 alors g(1,5)=0,75 ce qui signifie que la probabilité d'accepter y=1,5 comme valeur aléatoire généré par $p(x)$ est 0,75.
- D'autre part, si y=1, g(1)=1, ce qui signifie que la probabilité d'accepter y=1 comme nombre aléatoire généré par $p(x)$ est 1.
- Dans la figure, quand x=1, $P(x)$=$H(x)$. De même, on remarque que g atteint le maximum en x=1, puisque, plus que y s'éloigne de 1, la probabilité d'accepter la valeur simulée décroit.
- La probabilité d'accepter un nombre aléatoire généré par $h(x)$ est égale à 1/c=2/3.

- Selon le théorème, la probabilité d'acceptation est 1/c.
- Donc, la probabilité d'acceptation est élevée lorsque c est proche de 1, et cela arrive, bien sûr, lorsque $h(x)$ est pareille à $p(x)$.
- D'où, d'une part, on veut que $h(x)$ soit tellement proche de $p(x)$ que ce soit possible de façon que la probabilité d'acceptation soit élevée.
- D'autre part, on veut que $h(x)$ soit tellement facile à simuler que ce soit possible.

Algorithme de rejet:

- Le théorème suggère l'algorithme suivant pour générer un échantillon aléatoire de taille N à partir de $p(x)$ mais utilisant $h(x)$.

Algorithme: (Méthode de rejet)

- Données: Fonction de probabilité de la population $p(x)$, fonction de probabilité simulée $h(x)$ et la taille de l'échantillon N.
- Résultats: un échantillon $\{x_1,\ldots,x_N\}$ qui provient de $p(x)$.

Algorithme de rejet:

1. Faire $i=1$
2. Générer une valeur aléatoire u de la loi uniforme $U(0,1)$.
3. Générer une valeur aléatoire y de $h(y)$
4. Si $u \leq g(y)$, faire $x_i=y$. Autrement, aller à l'étape 2
5. Si $i<N$, augmenter i d'une unité et aller à l'étape 2. Autrement, redonner $\{x_1,\ldots,x_N\}$.

Efficience de l'algorithme et utilisation des poids:

- Lorsque c est grand, l'efficience de l'algorithme antérieur est basse et le pourcentage des valeurs rejetées est élevé.
- Donc, il faut générer un nombre très élevé de valeurs aléatoires de $h(y)$ pour obtenir un petit échantillon valable de $p(x)$.
- Mais, l'algorithme d'acceptation-rejet, peut devenir plus efficient avec la modification suivante. Écrire $p(x)$ sous la forme:

Efficience de l'algorithme et utilisation des poids:

$$p(x) = \frac{p(x)}{h(x)} h(x) = s(x)h(x)$$

où $s(x) = \frac{p(x)}{h(x)}$ est une fonction de poids.

- Alors, le poids de l'événement x est le quotient entre la probabilité réelle, $p(x)$, et la probabilité simulée, $h(x)$.
- D'où, $s(x) = c\,g(x)$, c'est-à-dire, le poids est proportionnel à $g(x)$.

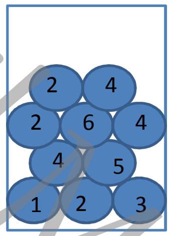
Efficience de l'algorithme et utilisation des poids:

- Par conséquent, au lieu de rejeter un nombre x que l'on a générer de $h(x)$, on lui affecte une probabilité proportionnelle à $s(x)$ ou $g(x)$.
- A la fin des simulations les poids se normalisent (en divisant chaque poids par la somme de toutes les poids) et on utilise les poids normalisés pour estimer la probabilité de n'importe quel événement d'intérêt.
- Cela conduit à une augmentation considérable de l'efficience du processus.

Efficience de l'algorithme et utilisation des poids:

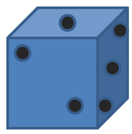
- Pour l'exemple, les poids correspondants à notre exemple du dé sont donnés dans la colonne des $s(x)$.
- Remarquons que dans le cas de l'urne n°2 le poids associé à l'événement x=6 est zéro, et le poids associé au reste des événements est le même.
- Alors, dans ce cas, l'utilisation des poids produit le même résultat que l'application de la méthode de rejet-acceptation.

Exemple n°3:



Urne n°3

x	p(x)
1	0,1
2	0,3
3	0,1
4	0,3
5	0,1
6	0,1



Le dé

x	h(x)	s(x)
1	1/6	0,6
2	1/6	1,8
3	1/6	0,6
4	1/6	1,8
5	1/6	0,6
6	1/6	0,6

Exemple n°3:

- La situation de l’urne n°3 est plus compliquée, et la méthodes des poids est plus efficiente que la méthode d’acceptation-rejet.