Université Abdelmalek Essaidi

L'Ecole Normale Supérieure de Tétouan

Master Spécialisé en Gestion informatisée des entreprises

Année Universitaire : 2012/2013

Méthodes spécifiques pour simuler des lois de probabilités continues

Réalisé par:

- Sara AMEZOUAR
- Asmae Benzaazoua
- Sara BOUZIDI
- Safae BAIBOUN

Encadré par:

Prof. Mohamed EL MEROUANI

Introduction

Plan

1-Simulation de la loi normale par Inversion

Il existe plusieurs approximations à la fonction de répartition de la loi normale et à son inverse. Une d'elles conduit à la formule d'inversion approximée:

$$X = \frac{U^{0,135} - (1-U)^{0,135}}{0,1975}$$

Elle est plus rapide que les autres méthodes que nous décrivons. Dans quelques applications, elle fournit une approximation suffisamment bonne.

2-Simulation de la loi normale par la Somme de 12 uniformes :

Ce procédé se base sur la théorème de la limite centrale et il peut être considéré comme exemple de la méthode de transformation.
Par le théorème de la limite centrale, si les variables Ui, i=1,2,…,n dépendantes et identiquement distribuées selon une uniforme U(0;1), par lequel E(Ui)=1/2, Var(Ui)=1/2, la variable :

$$X = \frac{(\sum_{i=1} n\, U_i - \frac{n}{2})}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

Soit approximativement une loi normale, pour n suffisamment grande.

Une bonne approximation se produit pour n=12,

par lequel et le procédé devient:

$$X = (\sum_{i=1}^{12} U_i) - 6$$

Générer $U_1, U_2, \ldots, U_{12}$ U(0;1)

Faire $X = (\sum_{i=1}^{12} U_i) - 6$

Sortir X

3-Simulation de la loi normale par la Méthode de Box-Muller

Un meilleur algorithme a été proposé par Box et Muller.
Cette méthode de Box-Muller utilise une représentation en polaire de deux coordonnées uniformes. Où :

La **fonction de densité** de (X,Y) est :

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{(-\frac{(x^2+y^2)}{2})}}$$

Soient (R,θ) les coordonnées polaires de (X,Y) :

$$\boldsymbol{R^2 = X^2 + Y^2}$$

Alors, on a l'algorithme suivant :

Générer **U1,U**$\boldsymbol{2 \rightarrow \mu}$**(0,1)**

Faire $\boldsymbol{R = \sqrt{-2\ln \mathrm{U1}}, \theta = 2\pi U_2}$

Faire $X = \boldsymbol{R\cos\theta\sqrt{-2\ln \mathrm{U1}}, = \cos\ 2\pi U_2}$

Faire $\boldsymbol{Y = Rsin\theta = \sqrt{-2\ln \mathrm{U1}}, \theta = \sin 2\pi U_2}$

Sortir X,Y.

Les équations pour obtenir X,Y s'appellent les transformations de **Box-Muller**.

4-Variante de marsaglia

La technique de Marsaglia et Bray améliore sensiblement les résultats par rapport à celle de Box et Muller. Elle nécessite toute fois légèrement plus de temps d'exécution numérique en raison d'un test conditionnel.

Son algorithme est :

Jusqu'à que $\boldsymbol{W} \leq \mathbf{1}$:

Générer $\mathbf{U_1, U_2}$ **->**$\boldsymbol{\mu}$**(0,1)**

Faire $\mathbf{V_1 = 2U_1 - 1;}$ $\mathbf{V_2 = 2U_2 - 1;}$ $\mathbf{W = V_1{}^2 + V_2{}^2}$

Faire **C=**$\frac{-2 \ln W}{W}$

Sortir **X=C.V**$_1$ et **Y=C.V**$_2$

Appliquons maintenant les transformations de Box -Muller avec :

W= R² ->μ**(0,1) et** θ **->**μ**(0,2π)**

$$\sin\theta = \frac{V2}{\sqrt{V1^{\,2} + V2^{\,2}}} = \frac{V2}{\sqrt{W}} \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \frac{V1}{\sqrt{V1^{\,2} + V2^{\,2}}} = \frac{V1}{\sqrt{W}}$$

Alors : $X = \sqrt{-2\ln W}\ \cos\theta$**=C. V1** et **Y=**$\sqrt{-2\ln W}\ \sin\theta$**=C. V2**

5-Utilisation des transformations pour une Loi normale N(μ, σ2) et pour la loi Log-normale

Loi Normale

Supposons que l'on a simulé la loi normale centrée réduite Y -> N(0,1) par une des méthodes vues précédemment.

Si on souhaite simuler par la loi normale X-> N(μ,σ^2), il suffit de faire la transformation **X= μ+σY**.

Loi Log-normale

Supposons que l'on a généré des variables normales Y comme avant. On sait que si X est Log-normale, Ln(X) est normale.

Donc il suffit de :

Générer Y normale;
Sortir X= e^Y

6-Loi exponentielle

- On sait si Y tire son échantillon a partir d'une loi exponentielle Exp (1) , alors $X = \frac{Y}{\lambda}$ suit une loi exponentielle Exp (λ) . Par cela supposons dans la suite que $\lambda = 1$.

Méthode d'inversion :

La méthode d'inversion est simple, puisque la fonction de répartition est $F(x) = 1 - e^{-x}$.

Alors X=-Ln (1-U)

Comme 1-U Suit la même loi de probabilité que U il en résulte que X=-LnU .

L'algorithme sera :

Générer U~U(0,1)

Faire X=-LnU

Sortir X

Malgré la simplicité théorique de ce procédé, il peut être lent sur un ordinateur si l'opération Logarithme népérien n'est pas implémentée dans le hardware .

7-Loi de Cauchy

On considère le cas de simulation d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Cauchy $C(\alpha, \beta)$ en utilisant la méthode d'inversion.

La fonction de répartition de X est :

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Pi} Arc\tan(\frac{x-\alpha}{\beta})$$

Par inversion, on obtient:

$$X = F^{-1}(U) = \alpha + \beta \tan[\Pi(u - \frac{1}{2})]$$

L'algorithme est :

- Générer U~U[0,1]
- Faire $X = \alpha + \beta \tan(\Pi (u - 0,5))$
- Sortir X

<u>8-Loi de X_n^2 (khi-deux)</u>

- Si les variables $Z_1, \ldots, Z_n$ sont

indépendantes qui suivent tous une loi X_n^2 normales N(0,1), alors $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ suit une loi X_n^2.
Cela suggère de générer n variables normales centrées réduites , les élever au carrée et les sommer pour générer la loi X_n^2 .
Lorsque n>30, on peut utiliser l'approximation normale de la variable donné par la formule $X = \frac{(Z + \sqrt{2n-1})^2}{2}$,Résolvons en X, on obtient $Z \approx \sqrt{2x} - \sqrt{2n-1}$ et le procédé est immédiat.

9-Loi de Student

Si Z est une variable normale N(0,1) est Y une variable indépendante de Z qui suit une loi X_n^2

Alors $X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit une loi t de Student avec n degrés de liberté.

Pour générer la variable X, nous générons Z et Y, pour lesquelles nous appliquons la formule précédente lorsque n est grande (n>30), nous utilisons l'approximation a la normale de la t de Student.

10-Loi F de Snedecor

Si Y_1 est une variable aléatoire qui suit une Loi X^2_{n1} et Y_2 qui suit une loi X^2_{n2} et toutes les deux sont indépendantes, alors

$$X = \frac{y_{1/n_1}}{y_{2/n_2}}$$

Suit une loi F de Sendecor avec n_1 et n_2 degrés de liberté .

Pour générer une loi F de Sendecor , premièrement nous générons deux variables X^2_{n1} , X^2_{n2} et après nous appliquons

$$X = \frac{y_{1/n_1}}{y_{2/n_2}}$$

Générer des lois avec excel

	formule	Description
	LOI.EXPONENTIELLE.N(x;lambda;cumulative(VRAI))	Fonction de distribution exponentielle cumulée
Loi exponentiel	LOI.EXPONENTIELLE.N(x;lambda;cumulative(Faux))	Probabilité de la fonction de distribution exponentielle
	(-)1/lambda*LN(ALEA())	La réciproque de la fonction de répartition

Loi de KHIDEUX	**=LOI.KHIDEUX(probabilité; degrés_liberté)**	**Probabilité unilatérale de la distribution Khi-deux**

	LOI.STUDENT.INVERSE(probabilité; degrés_liberté)	Renvoie la valeur d'une variable aléatoire suivant la loi de t de Student, en fonction de la probabilité et du nombre de degrés de liberté.
Loi de Student	LOI.STUDENT([x];[degrés];2)	Distribution bilatérale (Renvoie la probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi de t de Student.
	LOI.STUDENT([x];[degrés];1)	Distribution unilatérale
	LOI.STUDENT.INVERSE.BILATERALE(probabilité;deg_liberté)	Renvoie, pour une probabilité donnée, la valeur inverse bilatérale d'une variable aléatoire suivant une loi T de Student.

CONCLUSION