

# Simulation aléatoire sous R

**Réalisée par:** Josie Chavlie Ondongo  
AAZIZI ANASS  
BATRANE MOUSSA

**Encadré par:** Mr. MEROUANI Mohamed

*2012/2013*

## PLAN

- **Introduction générale:**
- **Les lois usuelles sur R**
- **Exemples de la génération de quelques lois Sous R :**
- **Box Muller**
  - **Méthode de Box-Muller : forme cartésienne**
  - **Méthode de Box-Muller : forme polaire**
  - **Démonstration:**

## Introduction générale:

- La simulation c'est une technique qui remplace l'expérience et permet d'étudier des séries statistiques. Comportant un grand nombre de données.

- La simulation est un outil utilisé pour la recherche d'un élément qui réagit d'une manière semblable à celui que l'on veut étudier et qui permettra de déduire les résultats. Lorsque l'outil de simulation utilise un ordinateur on parle de simulation numérique.

- L'un des majeurs les objectifs de la simulation c'est de Produire des observations (variables)  $X$  à partir de distributions (binomiale, exponentiel, normal, ...).

## Les lois usuelles sur R

- Le logiciel R permet d'effectuer des calculs avec toutes les lois de probabilité usuelles, et aussi de simuler des échantillons issus de ces lois. Le tableau suivant résume les différentes lois implémentées dans R.

Loi	Appellation R	Arguments
Bêta	beta	forme 1, forme 2
Binomiale	binom	size, prob
chi deux	chisq	df (degrés de liberté)
Uniforme	unif	min, max
exponentielle	exp	Rate
Fisher	f	df1, df2
gamma	gamma	forme, échelle
Géométrique	geom.	Prob
Hypergéométrique	hyper	m, n, k (taille échantillon)
binomiale négative	nbinom	size, prob
Normale	norm	mean, sd
Poisson	pois	Lambda
Student	t	Df
Weibull	weibull forme,	échelle

- Pour certaines lois, les paramètres ont des valeurs par défaut : parmi les plus utilisées, la loi uniforme *unif* porte par défaut sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et la loi normale normale est centrée réduite par défaut.
- Pour effectuer un calcul avec une de ces lois, il suffit d'utiliser comme fonction l'une des appellations R ci-dessus avec le préfixe *d* pour une densité, *p* pour une fonction de répartition, *q* pour une fonction quantile et *r* pour un tirage aléatoire.

## Exemples de la génération sur R

- 50 tirages de la loi Normale  $N(0,1)$
- 10 tirages selon la loi exponentielle
- probabilités de 0, 1, 2 pour la loi Poisson(4)
- Trouver le 3ème quartile de la loi  $N(10,4)$
- ...

- **Exemple 1 :**

Générer un échantillon X de  $n=100$  valeurs tirées selon la loi exponentielle sur R de moyenne 1

- **Exemple 2 :**

Générer un échantillon de  $n=36500$  valeurs avec la loi log-normale .  
 « loi log-normale : de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  si la variable  $Y = \ln(X)$  suit une loi normale d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  . Cette loi est parfois également appelée loi de Galton. »

- **Exemple 3 : « Test de Student »**

Appliquer pour tester si un échantillon gaussien a une moyenne différente d'une valeur ou pour tester si 2 échantillons gaussiens ont des moyennes différentes.

- **Exemple 4** : « *quantile-quantile plot* »

quantile-quantile plot (traçage des quantiles d'une distribution versus les quantiles d'une autre distribution).

*qqplot* : permet de comparer graphiquement les distributions de 2 échantillons pour savoir si elles sont identiques. Si les points sont alignés, les 2 échantillons ont des distributions similaires, sinon elles ne le sont pas.

- **Exemple 5** :

On va Tracer la densité (répartition des masses) d'une loi binomiale avec  $n=10$  et  $p=0.25$

## Box Muller

- Une méthode qui consiste à générer des paires de nombres aléatoires à distribution normale centrée réduite, à partir d'une source de nombres aléatoires de loi uniforme.
- La transformation prend communément deux formes.
- La forme simple transforme des coordonnées cartésiennes uniformément distribuées dans le cercle unité en des coordonnées normalement distribuées.

- La forme *polaire* transforme des coordonnées polaires uniformément distribuées en des coordonnées cartésiennes normalement distribuées.
- On peut également utiliser la méthode de la transformée inverse pour générer des nombres normalement distribués ; la méthode de Box-Muller a été mise au point pour être algorithmiquement plus efficace.

### Forme cartésienne BOX MULLER :

- Soit  $(U_1, U_2)$  un couple de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant toutes deux la loi uniforme standard  $\mathcal{U}([0; 1])$ . On note :

$$R = \{U_1^2 + U_2^2 | U_1^2 + U_2^2 \leq 1\}$$

- Alors les variables aléatoires  $X = U_1 \sqrt{\frac{-2 \ln(R)}{R}}$   
et:  $Y = U_2 \sqrt{\frac{-2 \ln(R)}{R}}$

sont indépendantes identiquement distribuées suivant toutes deux la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

## Forme polaire BOX MULLER :

- Soit  $(U_1, U_2)$  un couple de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant toutes deux la loi uniforme standard  $\mathcal{U}([0; 1])$
- Alors les variables aléatoires  $X = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$   
et :  $Y = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$   
sont indépendantes identiquement distribuées suivant toutes deux la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{1})$

## Démonstration:

- Considérons la densité d'un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  indépendantes identiquement distribuées suivant toutes deux la loi normale centrée réduite :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

L'expression en coordonnées polaires donne :

$$f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} \mathbf{1}_{[0, 2\pi]}(\theta) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\rho) d\rho d\theta$$

On associe ainsi à  $\Theta$  et  $R$  deux densités de probabilités :

$\Theta \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0, 2\pi]}(\theta)$ , qui est la densité d'une loi uniforme  $\mathcal{U}([0, 2\pi])$

$\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\rho)$ , qui est la densité d'une loi exponentielle  $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$  pour  $\mathbb{R}^+$ .

- Les simulations de  $R$  et  $\Theta$  viennent de la transformée inverse.

**Merci Pour votre aimable Attention..**