UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
TETOUAN

Méthodes De Simulation Spécifiques Pour Des Lois De Probabilités Discrètes

Présenté par :

Mohammed Amine QASSEMI
Soumaya LAARAIBI
Kawtar IMGHARENE

Encadré par:

MOHAMED El Merouani

PLAN

INTRODUCTION

3

LOI BINOMIALE

- ✓D'autre façon , il existe une façon d'échantillonage en générant « n » nombre aléatoire , u1,u2,u3,…..Un u(0,1),
- ✓On doit faire l'égalité de x la valeur aléatoire qu'on a génère a celle d'entre elles qui sont inférieur a p .
- ✓Lorsque : Ui < p et que bien sur la probabilité de cet événement égale a p , on obtient aussi une variable aléatoire x b(n,p).

4

ALGORITHME

- FAIRE X=0
- RÉPÉTER N FOIS
- GÉNÉRER U $\rightarrow$ U(0,1)

  SI U < P FAIRE X=X+1
- SORTIR X

FORMULE DE RÉCURRENCE DE LA LOI BINOMIALE

Cette méthode requière ‘n’ nombre aléatoire et ‘n’ comparaison .

$$P(X = k) = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{q}P(X = k-1)$$

ON NOTE QUE F= P(X<K) ET P=P(X=K)

GÉNÉRER U $\rightarrow$ U(0,1)

FAIRE I=0 ; P=F= $(1-p)^n$

JUSQU’À CE QUE U < F

FAIRE $P(X = k-1) = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{q}P(X = k)$,F=F+P K=K+1

SORTIR X=K

Convergence De La Loi Binomiale A La Loi Normal Par Le Théorème Centré Limite

- Pour introduire la loi normale *N (0,1), on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques* de la loi de la variable aléatoire

  où xn suit la loi $Zn = \frac{Xn - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}$

  binomiale B (n, p), et cela pour de grandes valeurs de *n et une valeur de p fixée entre 0 et 1.*

- Dans ce cas on génère z $\rightarrow$ n(0,1) , et on Résous $Zn = \frac{Xn - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}$ en x

  et on arrondit a une valeur entière non négative en faisant :

$$X = \max\{0, ent(-0,5 + np + Z\sqrt{np(1-p)})\}$$

Formule De Récurrence De La Loi De Poisson

Dans le cas de la loi de poisson p(λ) , pour λ petit on peut utiliser la méthode d'inversion se la formule de récurrence

$$P(X = k) = \frac{\lambda}{k} P(X = k-1)$$

on note que F= p(x<k) et p=p(x=k)

Générer U $\rightarrow$ U(0,1)

Faire k=0 , F=P= $e^{-\lambda}$

Jusqu'à que U<F

Faire $P(X = k) = \frac{\lambda}{k} P(X = k-1)$, F=F+P

k=k+1

Sortir x=k

LOI BINOMIALE NÉGATIVE

En probabilité et en statistiques, la **loi binomiale négative** est une distribution de probabilité discrète.

Elle décrit la situation suivante: une expérience consiste en une série de tirages indépendants, donnant un "succès" avec probabilité *p* (constante durant toute l'expérience) et un "échec" avec une probabilité complémentaire. Cette expérience se poursuit jusqu'à l'obtention d'un nombre donné n de succès. La variable aléatoire représentant le nombre d'échecs (avant l'obtention du nombre donné n de succès) suit alors une loi binomiale négative.

Ses paramètres sont *n*, le nombre de succès attendus, et *p*, la probabilité d'un succès. Cette loi est aussi connue sous le nom de **loi de pascal**.

9

LOI BINOMIALE NÉGATIVE

Définition : sous le schéma de Bernoulli (épreuves identiques et indépendantes), on désire obtenir n succès et l'on considère la variable aléatoire discrète x qui représente le nombre d'épreuves indépendantes k nécessaire à l'obtention des n succès.
La loi de X = Y - n est appelée loi binomiale négative de paramètres n et p et on a pour tout entier naturel k .

$$P(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$$

$$k, n \in N \qquad\qquad k \geq n$$

ALGORITHME

La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{BN}(n,p)$ en sortie de l'algorithme suivant.

X=0
Répéter n fois
Si (aléatoire>p)
Faire X=X+1
Sortir X
Finsi
FinnRépéter

11

Loi Binomiale Négative

- **Espérance mathématique.**

  L'Espérance associée à une loi binomiale négative est :

$$E(X)=\frac{n}{p}$$

- **Variance.**

  La Variance associée à une loi binomiale négative est :

$$Var(X)=n\frac{q}{p^2}$$

Loi Géométrique

- La loi géométrique est connu parfois par comme la loi exponentielle discrète, puisqu'elle peut être générer en échantillon par discrétisation d'une loi exponentielle.
- En effet, supposons que y $\rightarrow$ exp(λ).

soit x= ent(y). Alors,

$$P(X=r)=P(r\leq Y<r+1)=\int_r^{r+1}\lambda e^{-\lambda s}ds$$
$$=e^{-\lambda r}-e^{-\lambda(r+1)} \qquad (*)$$
$$=(e^{-\lambda})^r(1-e^{-\lambda})$$

13

Pour r = 0,1,…..,N et la fonction de loi de probabilité $P=(1-e^{-\lambda})$,

en prenant $\lambda=-\ln(1-p)$, on remarque que (*) précédente est identique à la fonction de probabilité d'une loi géométrique de paramètre p.

Donc :

$$X=ent(\frac{Ln(\mu)}{Ln(1-p)})=ent(\frac{-V}{Ln(1-p)})$$

Où

$$V=-Ln(\mu)\mapsto Exp(1)$$

14

Démonstration De Loi Géométrique

- Soit U suit la loi uniforme sur [0, 1], alors $1+E(\frac{Ln(U)}{Ln(1-p)})$ suit la loi géométrique de paramètre P.
- Notons: $X = 1+E(\frac{Ln(U)}{Ln(1-p)})$ par définition de la partie entière, x prend ses valeurs dans N^*.
- Soit maintenant $K \in N^*$:

$$P(X=K)=P(1+E(\frac{Ln(U)}{Ln(1-p)})=K)=P(E(\frac{Ln(U)}{Ln(1-p)})=K-1)$$

$$=P(K-1\leq\frac{Ln(U)}{Ln(1-p)}<K)=P(K.Ln(1-p)<U\leq(K-1).Ln(1-p))$$

$$=P((1-p)^k<U\leq(1-pk^{k-1})=(1-p)^{k-1}-(1-p)^k$$

$$=(1-p)^{k-1}p$$

Loi Hypergéométrique

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p, si, et seulement si :
  - X prend un certain nombre de valeurs entières formant un **intervalle X** (Ω)contenu dans l'intervalle $[0\,;n]$.
  - $N\,p$ est un entier, noté N_1, on note alors N_2 l'entier N - N_1.
  - Pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$, $P(X=K)=\frac{C_K^{N_1}C_{n-K}^{N_2}}{C_n^N}$
- La relation « x suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p» s'écrit x $\longrightarrow$ H(N,n,p).

Loi Hypergéométrique

- **ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE:**

$$E(X)=np$$

- **VARIANCE:**

$$Var(X)=npq\frac{N-n}{N-1}$$

ALGORITHME

FAIRE X=0, $N_1=NP$ $N_2=N-N_1$.

RÉPÉTER N FOIS.

GÉNÉRER U $\longrightarrow$ U(0,1)

SI $U \leq \frac{N_1}{N}$, FAIRE X=X+1, ET $N_1=N_1-1$

SINON $N_2=N_2-1$

FAIRE $N=N-1$

SORTIR X.

CONCLUSION

19

MERCI POUR VOTRE ATTENTION ☺

20