Probabilités et statistique
Série n° 1

Exercice 1 :

Soient m opérateurs et n appareils numérotés qu'ils peuvent soumettre à l'entretien $(m \leq n)$. Chaque opérateur choisit au hasard et avec la même probabilité un appareil, mais sous la condition qu'aucun des appareils ne puisse être desservi par plus d'un opérateur.

Trouver la probabilité pour que les appareils choisis pour l'entretien aient les numéros $1, 2, \ldots, m$

Solution :

Le nombre de variantes par lesquelles on peut répartir m opérateurs suivant les n appareils est égal au nombre d'arrangements de n éléments m à m

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

D'après l'énoncé de l'exercice, toutes ces variantes sont équiprobables. Le nombre de cas favorables (dans lesquels sont desservis les m premiers appareils) est égal à **m!**

On en tire la probabilité cherchée P

$$P = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}} = \frac{m!}{A_n^m} = \frac{m!}{n(n-1)\cdots(n-m+1)}$$

$$P = 1/C_n^m.$$

Exercice 2 :

Un bureau de poste a reçu 4 télégrammes ; il existe en tout 4 voies de communication. Les télégrammes sont répartis au hasard entre les voies. Trouver la probabilité de l'événement A = {trois télégrammes sont transmis par une voie, un télégramme, par une autre voie, les deux voies restantes demeurent disponibles}.

Solution :

Le nombre total de cas est 4^4. Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir une voie employée pour transmettre trois télégrammes est $C_4^1 = 4$; le nombre de procédés par lesquels on peut choisir une voie pour envoyer un télégramme est $C_3^1 = 3$. Le nombre de procédés par lesquels on peut choisir trois des quatre télégrammes pour les envoyer par une voie est $C_4^3 = 4$. Le nombre total de cas favorables est donc $4 \times 3 \times 4$.

Ainsi $P(A) = \dfrac{4 \times 3 \times 4}{4^4} = \dfrac{3}{16}$.

Exercice 3 :

Soit sur l'écran circulaire d'un radar, de rayon r, l'image ponctuelle M de l'objet (voir figure), qui occupe

une position aléatoire dans le cadre de l'écran, aucune des régions de ce dernier n'étant préférentielle (l'image de l'objet se projette sur l'écran au hasard). On envisage l'événement A

qui consiste en ce que la distance ρ du point M au centre de l'écran soit inférieure à $r/2$: $A = \{\rho < r/2\}$.
Trouver la probabilité de cet événement.

Solution :

L'espace Ω des événements élémentaires est l'intérieur du cercle de rayon r (la région A hachurée sur la figure)

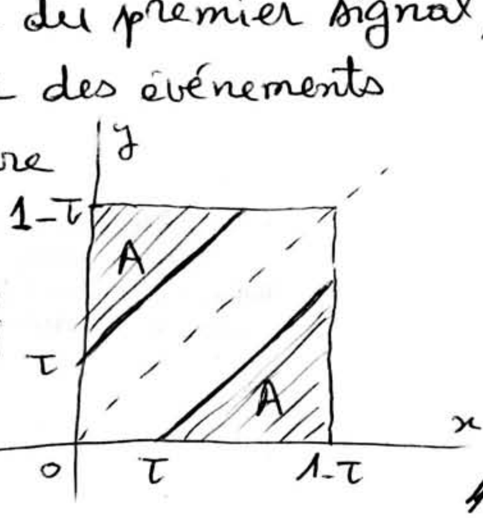
$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

Exercice 4 :

Deux signaux, d'une durée $\tau < 1/2$ chacun, sont transmis par le canal radio-électrique pendant un intervalle de temps $(0;1)$; chacun d'eux commence avec la même probabilité à n'importe quel instant de l'intervalle $(0; 1-\tau)$. Si les signaux se chevauchent ne serait-ce qu'en partie, ils se perturbent tous les deux et ne peuvent être reçus. Trouver la probabilité pour que les signaux soient reçus sans perturbations.

Solution :

Notons par x l'instant du début du premier signal, par y, celui du deuxième. L'espace des événements élémentaires est représenté sur la figure. Les régions A hachurées représentent l'événement $A = \{$signaux non perturbés$\}$

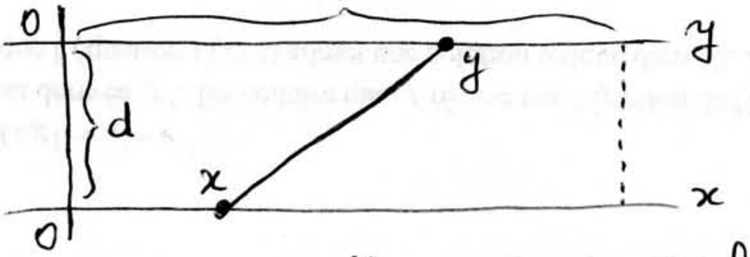


$$A = \{|x-y| > \tau\}$$

$$P(A) = S_A/S_\Omega = (1-2\tau)^2/(1-\tau)^2.$$

Exercice 5 :

On a deux lignes parallèles de communication téléphonique de longueur l séparées par une distance $d<l$.



On sait que chacune d'elles présente quelque part (on ne sait pas juste où) une rupture. Trouver la probabilité pour que la distance R entre les points de rupture ne soit pas supérieure à a $\left(d < a < \sqrt{l^2+d^2}\right)$.

Solution :

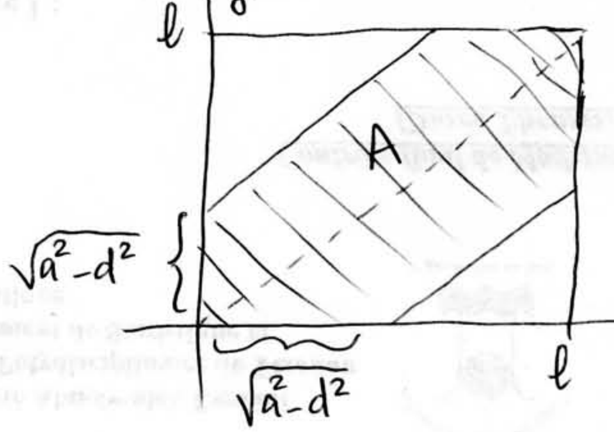
Introduisons la notation x pour l'abscisse du premier point de rupture, et y, pour celle du deuxième ; l'événement dont il s'agit

$$R = \sqrt{|x-y|^2+d^2} \quad ;$$

$$A = \left\{ |x-y|^2 + d^2 \leq a^2 \right\} = \left\{ |x-y| \leq \sqrt{a^2-d^2} \right\}.$$

L'espace fondamental est un carré de côté l ; $S_\Omega = l^2$

La région A est hachurée sur le schéma suivant :



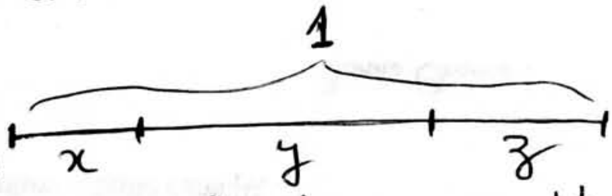
$$S_A = 2l\sqrt{a^2-d^2} - a^2 + d^2$$

Donc

$$P(A) = \frac{2}{l}\sqrt{a^2-d^2} - \frac{a^2+d^2}{l^2}.$$

Exercice 6 :

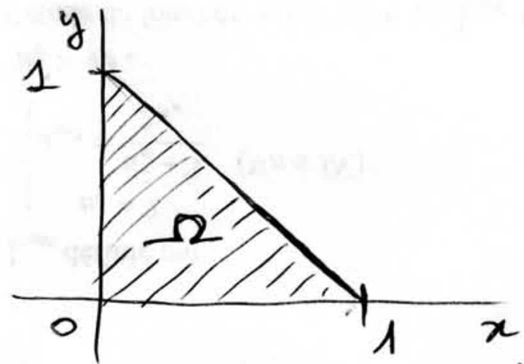
Une tige de longueur 1 est cassée en trois parties arbitraires x, y, z.



Trouver la probabilité pour que les tronçons obtenus permettent de composer un triangle.

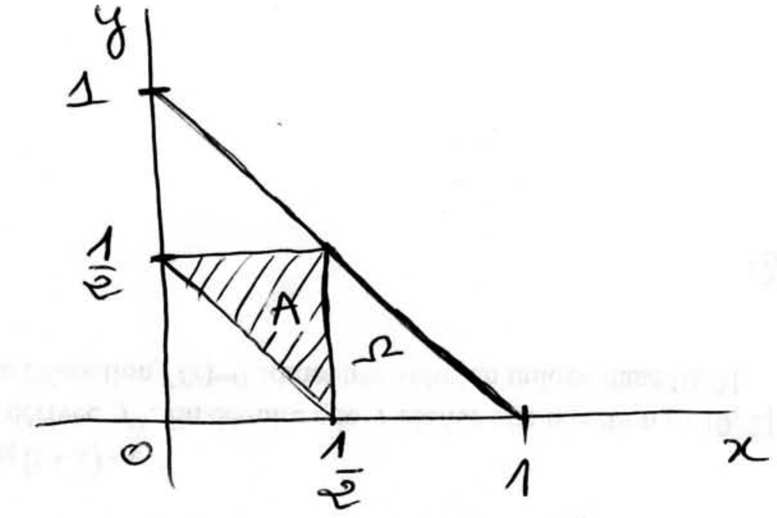
Solution :

L'événement élémentaire ω est caractérisé par deux paramètres : x et y [étant donné que $z = 1-(x+y)$].
Représentons cet événement par un point dans le plan xOy



les variables x, y sont soumises aux conditions : $x > 0$; $y > 0$; $x+y < 1$; l'espace des événements élémentaires est la partie intérieure d'un triangle rectangle à côtés égaux à l'unité ; $S_\Omega = 1/2$.

La condition d'après laquelle les tronçons $x, y, 1-(x+y)$ rendent possible la composition d'un triangle se ramène à deux conditions suivantes : 1) La somme de deux côtés quelconques est plus grande que le troisième côté ; 2) la différence de deux côtés quelconques est plus petite que le troisième côté.
A cette condition correspond la région triangulaire A dans le schéma suivant :



l'aire de A est $S_A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$;

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 7 :

Le message transmis par une voie de communications compte n signes (symboles). Pendant la transmission chaque signe est perturbé indépendamment des autres avec une probabilité p. Pour rendre la transmission plus sûre le message est répété k fois. Trouver la probabilité pour qu'au moins un des messages transmis ne soit perturbé en aucun de ses signes.

Solution :

La probabilité pour qu'un message isolé ne soit pas perturbé est égale à $(1-p)^n$; la probabilité pour qu'au moins un des k messages ne soit pas paturbé $P(A) = 1 - \left[1-(1-p)^n\right]^k$.

Exercice 8 :

Soient trois urnes d'aspect extérieur identique. La première contient a boules blanches et b noires ; la deuxième, c boules blanches et d noires ; la troisième ne contient que des boules blanches. Une personne s'approche au hasard de l'une des urnes et en tire une boule.

Trouver la probabilité pour que la boule soit blanche.

Solution :

Soit l'événement $A = \{\text{sortie de la boule blanche}\}$

Composons les hypothèses :

$H_1 = \{\text{choix de la } 1^{\text{ère}} \text{ urne}\}$;

$H_2 = \{\text{choix de la } 2^{\text{ème}} \text{ urne}\}$;

$H_3 = \{\text{choix de la } 3^{\text{ème}} \text{ urne}\}$.

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3} \; ; \quad P(A/H_1) = \frac{a}{a+b}$$

$$P(A/H_2) = \frac{c}{c+d} \; ; \quad P(A/H_3) = 1$$

D'après la formule des probabilité totales

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right).$$

Exercice 9 :

Soient trois urnes : La première contient a boules blanches et b noires ; la deuxième, c boules blanches et d noires ; la troisième k boules blanches (pas de boules noires). Une personne choisit au hasard une urne et en tire une boule. Cette boule s'est avérée blanche. Trouver la probabilité pour que cette boule soit tirée de la première, de la deuxième et de la troisième urne.

Solution :

Cherchons la solution d'après la formule de Bayes.

Hypothèses :

$H_1 = \{\text{choix de la première urne}\}$

$H_2 = \{\text{choix de la deuxième urne}\}$

$H_3 = \{\text{choix de la troisième urne}\}$

A priori (avant l'expérience) toute les hypothèses sont équiprobables

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3 .$$

On a observé l'événement $A = \{\text{apparition d'une boule blanche}\}$

Cherchons les probabilités conditionnelles

$$P(A/H_1) = \frac{a}{a+b} \quad ; \quad P(A/H_2) = \frac{c}{c+d} \quad ; \quad P(A/H_3) = 1$$

D'après la formule de Bayes la probabilité a posteriori pour que la boule soit tirée de la première urne est égale à

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{3} P(A/H_1)}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} P(A/H_i)} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}$$

d'une façon analogue

$$P(H_2/A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}$$

et $$P(H_3/A) = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1} .$$

Exercice 10 :

Un appareil se compose de deux ensembles ; le fonctionnement de chacun d'eux est absolument nécessaire pour assurer le service de l'appareil tout entier. La fiabilité (probabilité de fonctionnement sans défaillance pendant un temps t) du premier ensemble est p_1, du deuxième, p_2. L'appareil a été mis à l'essai pendant un temps t, ce qui a permis d'établir qu'il est en panne.

Trouver la probabilité pour que le premier ensemble soit seul à subir une défaillance, alors que le deuxième en bon état.

Solution :

Avant l'expérience (l'épreuve) on peut avancer quatre hypothèses :

$H_0 = \{$les deux ensembles sont en bon état$\}$

$H_1 = \{$le premier ensemble est en panne, le deuxième en bon état$\}$

$H_2 = \{$le premier ensemble est en bon état, le deuxième est en panne$\}$

$H_3 = \{$les deux ensembles sont en panne$\}$

les probabilités des hypothèses :

$P(H_0) = p_1 p_2$; $P(H_1) = (1-p_1)p_2$;

$P(H_2) = p_1(1-p_2)$; $P(H_3) = (1-p_1)(1-p_2)$.

On a observé l'événement $A = \{$l'appareil est tombé en panne$\}$,

$$P(A/H_0) = 0 \ ; \quad P(A/H_1) = P(A/H_2) = P(A/H_3) = 1$$

D'après la formule de Bayes :

$$P(H_1/A) = \frac{(1-p_1)\,p_2}{(1-p_1)\,p_2 + p_1(1-p_2) + (1-p_1)(1-p_2)}$$

$$= \frac{(1-p_1)\,p_2}{1 - p_1 p_2}$$