Université Abdelmalek Essaâdi **Année universitaire : 2013/2014**
ENSA de Tétouan **1ère année de cycle ingénieur**

T.D. de Probabilités et Statistiques
Série n°2

Exercice 1 :

Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère « au hasard » deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire ensuite « au hasard » une boule dans l'urne A. On cherche

1) la probabilité que la boule tirée soit blanche,

2) la probabilité que l'une au moins des boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée est blanche.

Exercice 2 :

Soient deux réels $a>0$ et $\alpha>0$. Soit f la fonction définie sur $IR+$ par : pour tout $x \in IR+$,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & si \ 0 \le x < \dfrac{a}{2} \\ \alpha(a-x) & si \ \dfrac{a}{2} \le x < a \\ 0 & si \ x \ge a \end{cases}$$

1. Calculer la constante α pour que f soit une densité de probabilité. On choisit dorénavant cette valeur pour α.

2. Soient X une variable aléatoire de densité f et un réel $b \in \left]0, \dfrac{a}{2}\right[$; calculer les probabilités

$P\left(X > \dfrac{a}{2}\right)$ et $P\left(\dfrac{a}{2} - b < X \le \dfrac{a}{2} + b\right)$.

3. Démontrer que pour tout $b \in \left]0, \dfrac{a}{2}\right[$, les événements $A = \left(X > \dfrac{a}{2}\right)$ et $B = \left(\dfrac{a}{2} - b < X \le \dfrac{a}{2} + b\right)$ sont indépendants.

Exercice 3 :

On considère les deux fonctions F et H données par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{e^{-x}}{2} & si \ x \ge 0 \\ 0 & si \ x < 0 \end{cases} \quad \textbf{et} \quad H(y) = \begin{cases} 1 & si \ y > 0 \\ 0 & si \ y \le 0 \end{cases}.$$

Ces fonctions peuvent-elles être des fonctions de répartition de variables aléatoires X et Y, respectivement ?

Exercice 4 :

Une variable aléatoire continue X est de densité de probabilité f définie par : $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, pour tout réel x, où a est une constante positive non nulle.

1. Déterminer la constante a.

2. Trouver la fonction de répartition F de la variable X.

3. Trouver la probabilité pour que la variable X tombe dan l'intervalle (-1,1).

4. L'espérance mathématique existe-t-elle pour la variable aléatoire X ?

Exercice 5 :
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pannes d'un dispositif électronique donné, durant une période donnée. Cette variable aléatoire admet la fonction de répartition suivante :

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{e^{-x}}{2} & si \;\; x\geq 0\\ 0 & si \;\; x<0\end{cases}$$

Donner la probabilité :
1. qu'il ne survienne aucune panne,
2. qu'il se produise moins de deux pannes,
3. qu'il se produise plus de 6 pannes,
4. qu'il survienne un nombre de pannes compris entre 1 et 3.

Exercice 6:
La densité d'une variable aléatoire continue X est f. Trouver la densité h de la variable aléatoire $Y=aX+b$, où $a\neq 0$ et b ne sont pas aléatoires.

Exercice 7:
Supposons que la variable aléatoire X représente le point donné par un dé. Quelle est la loi de probabilité et la fonction de répartition de la variable $Y=2+X^2$.

Exercice 8:
Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x)=\begin{cases}0 & si \;\; x\leq 0\\ \dfrac{1}{a} & si \;\; 0<x\leq a\\ 0 & si \;\; x>a\end{cases}$$

Donner les lois de probabilités des variables aléatoires : $Y=X^2$; $Z=\sqrt{X}$.

Exercice 9:
Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & si \;\; 0<x<\pi\\ 0 & autrement\end{cases}$$

Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire continue $Y=\sin X$.

Exercice 10 :
On dit qu'une variable aléatoire X est distribuée symétriquement autour de a si $P(X\geq a+x)=P(X\leq a-x)$; pour tout x.
Soit X une variable aléatoire distribuée symétriquement autour de a. Montrer que :
1°) Si F est la fonction de répartition de X, on a : $F(a-x)=1-F(a+x)+P(X=a+x)$.
2°) Si f est la fonction de densité de la variable aléatoire continue X, on a : $f(a-x)=f(a+x)$.
3°) $E(X)=a$.