Probabilités et statistiques

Corrigés de la série n° 2

Exercice 1 :

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant de traduire les tirages uniformes successifs.

1°) Si X_1 désigne la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches transférées et si B est l'événement « une boule blanche est tirée dans l'urne A », on peut écrire

$$P(X_1=2)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2} \; ; \; P(X_1=1)=\frac{C_8^1 C_4^1}{C_{12}^2}$$

$$P(X_1=0)=\frac{C_8^2}{C_{12}^2} \; ; \text{ soit } P(X_1=2)=\frac{1}{11} \; ; \; P(X_1=1)=\frac{16}{33}$$

$$P(X_1=0)=\frac{14}{33}.$$

Par ailleurs, les tirages dans l'urne A étant uniformes, on a :

$$P(B/X_1=2)=\frac{8}{13} \; ; \; P(B/X_1=1)=\frac{7}{13} \; ; \; P(B/X_1=0)=\frac{6}{13}$$

On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$P(B)=\sum_{j=0}^{2} P(B/X_1=j)\,.\,P(X_1=j)$$

soit, tous calculs faits : $P(B)=\dfrac{220}{429}$.

2°) On doit calculer $P(X_1 \geq 1/B)$. On a :

$$P(X_1=2/B)=\frac{P(B/X_1=2)\,.\,P(X_1=2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{11}\cdot\frac{8}{13}}{\frac{220}{429}}$$

Soit :

$$P(X_1=2/B)=\frac{6}{55}$$

et $$P(X_1=1/B)=\frac{P(B/X_1=1)\,.\,P(X_1=1)}{P(B)}=\frac{\frac{16}{33}\cdot\frac{7}{13}}{\frac{220}{429}}$$

Soit : $P(X_1=1/B)=\dfrac{28}{55}$.

Par additivité d'une probabilité conditionnelle, il vient alors

$$P(X_1 \geq 1 / B) = P(X_1 = 1 / B) + P(X_1 = 2 / B) ;$$

soit $$P(X_1 \geq 1 / B) = \frac{34}{55}$$

Exercice 2 :

1°) On a : $\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{a/2} x\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} (a-x)\,dx = \frac{a^2}{4}$

Soit $\boxed{\alpha = \frac{4}{a^2}}$

2°) On a : $P\left(X > \frac{a}{2}\right) = \alpha \int_{\frac{a}{2}}^{a} (a-x)\,dx$

soit encore $\boxed{P\left(X > \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}}$

De même, on a

$$P\left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right) = \alpha\left(\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} x\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} (a-x)\,dx\right),$$

ce qui donne, en effectuant le changement de variable $y = a - x$ dans la 2ème intégrale :

$$P\left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right) = 2\alpha \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} x\,dx = 2\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}}$$

$$= \alpha b(a-b),$$

Soit $\boxed{P\left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right) = \frac{4b(a-b)}{a^2}}$

3°) On a : $P(A \cap B) = P\left(\frac{a}{2} < X \leq \frac{a}{2} + b\right)$

$$= \alpha \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} (a-x)\,dx$$

soit, par changement de variable $y = a - x$:

$$P(A \cap B) = \alpha \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} y\,dy = \frac{\alpha}{2}\left[b(a-b)\right]$$

ce qui démontre que l'on a : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, c'est-à-dire que les événements A et B sont indépendants.

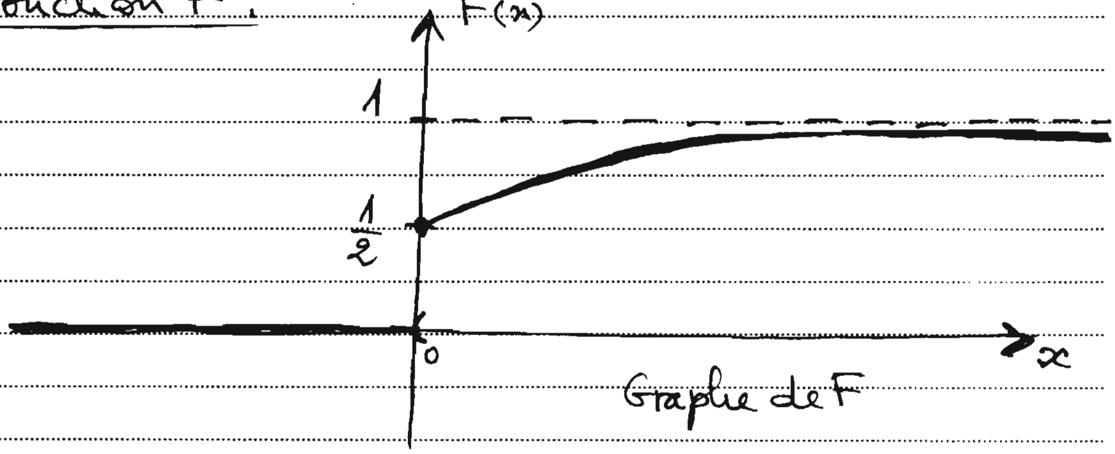
Exercice 3 :

D'une manière générale, une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ sera considérée comme une fonction de répartition d'une v.a. si, et seulement si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- F est non décroissante
- F est continue à droite en tout point x de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Voyons si ces conditions sont vérifiées par les fonctions F et H données :

1°) <u>Fonction F :</u>



Graphe de F

On a :

- $F'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$; donc $F'(x) \geq 0$

d'où F est non décroissante

- $\forall \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$, $\lim\limits_{x \to \alpha} F(x) = F(\alpha) \Leftrightarrow$ F est continue en α, $\alpha \neq 0$

Pour $\alpha = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = 0 \neq F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{1}{2} = F(0)$$

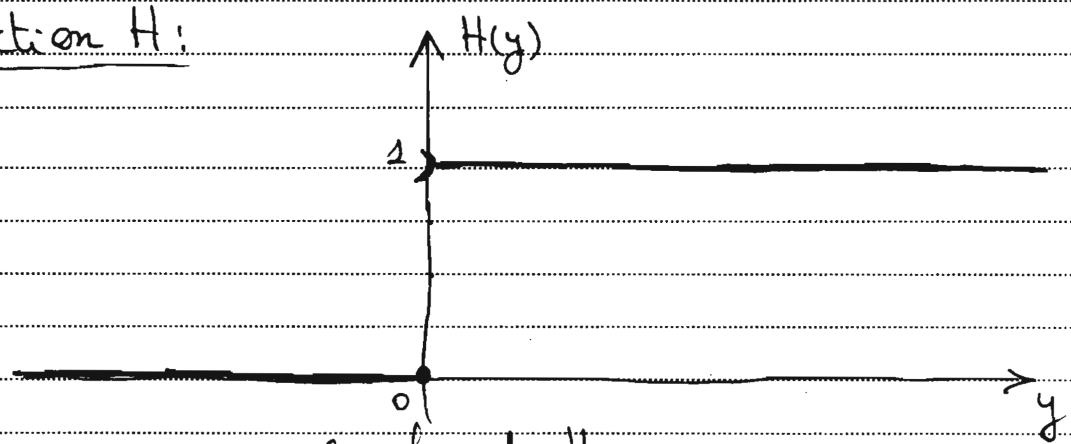
F est donc continue à droite, mais discontinue à gauche de 0.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (0) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right) = 1 - 0 = 1$

Donc F est bien une fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

Fonction H :



Graphe de H

On vérifie de même que :
- H est non décroissante
- H est continue en tout point $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Pour $\alpha = 0$, on a $\lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = 0 = H(0)$

$\lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = 1 \neq 0 = H(0)$

Donc H est continue à gauche de 0, mais discontinue à droite de 0
D'où H ne peut pas être considérée comme une fonction de répartition et ceci malgré que l'on ait : $\lim\limits_{y \to -\infty} H(y) = 0$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} H(y) = 1$.

Exercice 4 :

1°) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = a\left[\operatorname{Arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = a\pi$

donc, pour que f soit bien une densité de probabilité, il faut que $\boxed{a = \frac{1}{\pi}}$

2°) $F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctg} t\right]_{-\infty}^{x}$

$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctg} x + \frac{1}{2}$

3°) $P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1)$

$$= \frac{1}{\pi}\text{Arctg}(1) - \frac{1}{\pi}\text{Arctg}(-1) = \frac{1}{2}.$$

4°) $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\pi(1+x^2)}$

Posons $1+x^2 = t$, alors $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\Big[\log t\Big]_1^{\infty} \to \infty$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\pi(1+x^2)}$ est divergente

d'où $E(X)$ n'existe pas.

Exercice 5 :

1°) Probabilité qu'il ne survienne aucune panne $= P(X=0)$

On a $F(0) = P(X \leq 0) = P(\{X<0\} \cup \{X=0\})$

$$= P(X<0) + P(X=0) - P(\emptyset)$$

donc $P(X=0) = F(0) - P(X<0) = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

2°) Probabilité qu'il se produise moins de 2 pannes $= P(X<2)$

$$\boxed{P(X<2) = P(X\leq 2) = F(2) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2} \simeq 0{,}932}$$

3°) $P(X>6) = 1 - P(X\leq 6) = 1 - F(6) = \dfrac{e^{-6}}{2}$

$$\boxed{P(X>6) = \frac{e^{-6}}{2} \simeq 0{,}00124}$$

4°) $P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1)$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-3} - 1 + \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{e^{-1} - e^{-3}}{2} \simeq 0{,}159$$

Exercice 6 :

La fonction $g(x) = ax+b$ est dérivable et sa dérivée garde un signe constant pour tout x, on peut, donc, appliquer la formule $h(y) = f(g^{-1}(y))\left|(g^{-1}(y))'\right|$

où h est la densité de probabilité de la variable $Y = aX+b$

La fonction inverse $g^{-1}(y)$ se calcule en résolvant l'équation $y = ax+b$ par rapport à x ; on obtient $g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.

D'après le calcul $\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{a}$; $\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{|a|}$;

D'où $\quad h(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Exercice 7 :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$Y = 2 + X^2$ est aussi une variable aléatoire discrète :

$$Y(\Omega) = \{3, 6, 11, 18, 27, 38\}$$

- Si $y \notin Y(\Omega)$; $P(Y=y) = 0$
- Si $y \in Y(\Omega)$; $P(Y=y) = P(X = \sqrt{y-2}) = \frac{1}{6}$

La fonction F de répartition de Y est :

$$F(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 3 \\ 1/6 & \text{si } 3 \leq y < 6 \\ 1/3 & \text{si } 6 \leq y < 11 \\ 1/2 & \text{si } 11 \leq y < 18 \\ 2/3 & \text{si } 18 \leq y < 27 \\ 5/6 & \text{si } 27 \leq y < 38 \\ 1 & \text{si } y \geq 38 \end{cases}$$

Exercice 8 :

Soit F la fonction de répartition de X

" G " " " " " $Y = X^2$

et H " " " " " $Z = \sqrt{X}$

On note, donc, g et h les fonctions de densité de Y et Z respect.

Déterminons g : Soit $y \in \mathbb{R}$; $P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$

si $y < 0$; $\quad P(Y \leq y) = 0$

si $y \geq 0$; $\quad P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

$$= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$$

$$= F(\sqrt{y}) - \underbrace{F(-\sqrt{y})}_{=0} = F(\sqrt{y})$$

or $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; ; \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x}{a} \; ; \text{ si } 0 < x \leq a \\ 1 \; ; \text{ si } x > a \end{cases}$$

donc $G(y) = F(\cancel{Y} \leq y) = F(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{a} \text{ si } 0 < y \leq a^2 \\ 1 \text{ si } y \geq a^2 \end{cases}$

d'où $g(y) = G'(y) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{y}} \; ; \text{ si } 0 < y \leq a^2 \\ 0 \; ; \text{ ailleurs} \end{cases}$

De même, pour $Z = \sqrt{X}$

Soit $z \geq 0$ $\quad H(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z^2) = F(z^2)$

donc $h(z) = 2z F'(z^2) = 2z f(z^2)$

d'où $h(z) = \begin{cases} \frac{2z}{a} \; ; \text{ si } 0 < z \leq \sqrt{a} \\ 0 \; ; \text{ ailleurs.} \end{cases}$

Exercice 9:

La transformation considérée ici est $g(x) = \sin x$

Dans ce cas $g'(x) = \cos x$ qui est positive pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et négative pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$

Ainsi, les conditions de la formule qui donne la loi d'une transformation d'une v.a. continue ne sont pas satisfaites.

Donc, on cherche d'abord la fonction de répartition de Y et après on dérive celle-ci pour trouver la densité:

$$P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) \quad ; \quad 0 < y < 1$$
$$= P(\{0 \leq X \leq x_1\} \cup \{x_2 \leq X \leq \pi\})$$

où $x_1 = \sin^{-1} y$ et $x_2 = \pi - \sin^{-1} y$

Ainsi : $P(Y \leq y) = \int_0^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_2}^{\pi} f(x)\, dx$

$$= \left(\frac{x_1}{\pi}\right)^2 + 1 - \left(\frac{x_2}{\pi}\right)^2$$

Donc, la densité de Y est donnée par:

$$h(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin^{-1} y}{\pi}\right)^2 + \frac{d}{dy}\left[1 - \left(\frac{\pi - \sin^{-1} y}{\pi}\right)^2\right]$$

d'où $h(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & ; \text{ si } 0<y<1 \\ 0 & ; \text{ autrement} \end{cases}$

Exercice 10 :

Soit X une v.a. vérifiant $P(X \geq a+x) = P(X \leq a-x)$; $\forall x$

1°) Soit F sa fonction de répartition. On a :

$$\begin{aligned} F(a-x) &= P(X \leq a-x) = P(X \geq a+x) \\ &= P(\{X > a+x\} \cup \{X = a+x\}) \\ &= P(X > a+x) + P(X = a+x) - P(\{X > a+x\} \cap \{X = a+x\}) \\ &= P(X > a+x) + P(X = a+x) - P(\emptyset) \\ &= 1 - P(X \leq a+x) + P(X = a+x) \\ &= 1 - F(a+x) + P(X = a+x) \end{aligned}$$

2°) Soit f la fonction de densité de X. D'après 1°), on a :

$$F(a-x) = 1 - F(a+x) + P(X = a+x)$$

dérivons par rapport à x, on obtient :

$$-f(a-x) = -f(a+x) \Longleftrightarrow f(a-x) = f(a+x)$$

3°)

$$E(a-X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a-x) f(x)\,dx$$

chgt de variable dans cette intégrale ; soit $y = a-x$

alors $x = a-y$ et $dx = -dy$

qd $x \to -\infty$; $y \to +\infty$

et qd $x \to +\infty$; $y \to -\infty$

donc $E(a-X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(a-y)\,dy$; Mais $f(a-y) = f(a+y)$

d'où $E(a-X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(a+y)\,dy$

chgt de variable dans cette 2ème intégrale ; soit $x = y-a$

alors $y = x-a$, donc $dy = dx$

qd $y \to -\infty$; $x \to -\infty$

et $y \to +\infty$; $x \to +\infty$

donc $E(a-X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) f(x)\,dx = E(X-a)$

d'où $E(X) - a = a - E(X)$

Finalement $E(X) = a$