Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2008/2009
LF Sciences Économiques & Gestion
Semestre 3
Module : Méthodes Quantitatives II

***Contrôle final de Mathématiques II***

**Durée : 2 heures**



**Problème n°1 :**

Monter que, dans $IR^3$, trois vecteurs qui sont deux à deux orthogonaux, forment une base.

**Problème n°2 :**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Soit le système d'équations linéaires:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 6x + 7y + 4z = 2 \\ 6x - 6y - 4z = 3 \end{cases}$$

a) Donner l'écriture matricielle de système en fonction de la matrice A.
b) Résoudre le système par la méthode matricielle en utilisant la question n°1.

**Problème n°3 :**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme ou l'équation caractéristique de la matrice M.
2. Calculer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Montrer que M est diagonalisable.
4. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que N admet les mêmes valeurs propres que M.
b) Prouver qu'il existe une matrice inversible P telle que $N = PMP^{-1}$ et donner explicitement une telle matrice P.

Pr. M. EL MEROUANI

Année Universitaire : 2008 – 2009
LEF « sciences économiques & Gestion »
$S_3$ Méthodes Quantitatives II

# Correction du Contrôle final de Maths II

## Problème n° 1 :

* Soient $u, v, w$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$u.v = 0$ ; $v.w = 0$ et $u.w = 0$

* Montrons que $\{u, v, w\}$ est un système libre :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

Alors $(\alpha u + \beta v + \gamma w) . u = 0$

$$\Rightarrow \alpha \|u\|^2 + \beta \underbrace{v.u}_{=0} + \gamma \underbrace{w.u}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha . \|u\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

De même, en faisant le produit scalaire par $u$ et $w$ on montre que $\beta = 0$ et $\gamma = 0$

D'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$

* $\{u, v, w\}$ système libre de $\mathbb{R}^3$ composé de 3 vecteurs donc c'est une base. ∎

## Problème n°2 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

1°) $$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

d'où $A$ est inversible.

Calculons $A^{-1}$ :

on a : $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^{t}\mathrm{com}\, A$$

$$\mathrm{com}\, A = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 48 & 10 & -2 \\ -78 & -18 & 5 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}\mathrm{com}\, A = A^* = \begin{pmatrix} -4 & 48 & -78 \\ -2 & +10 & -18 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -4 & 48 & -78 \\ -2 & +10 & -18 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -48/14 & \frac{39}{7} \\ 1/7 & \frac{-5}{7} & \frac{9}{7} \\ 1/14 & \frac{1}{7} & \frac{-5}{14} \end{pmatrix}$$

2°) a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 6x + 7y + 4z = 2 \\ 6x - 6y - 4z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y - z = -1 \\ 6x + 7y + 4z = 2 \\ 6x - 6y - 4z = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 7 & 4 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{{}^tA . X = K}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) ${}^tA . X = K \Rightarrow X = ({}^tA)^{-1} . K$

$\Rightarrow X = {}^t(A^{-1}) . K$

$$\Rightarrow X = {}^t\begin{pmatrix} 2/7 & -48/14 & 39/7 \\ 1/7 & -5/7 & 9/7 \\ 1/14 & 1/7 & -5/14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 & 1/14 \\ -48/14 & -5/7 & 1/7 \\ 39/7 & 9/7 & -5/14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{14} \\ \frac{48}{14} - \frac{10}{7} + \frac{3}{7} \\ -\frac{39}{7} + \frac{18}{7} - \frac{15}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{17}{7} \\ -\frac{57}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/14 \\ \frac{17}{7} \\ \frac{-57}{14} \end{pmatrix}$$

Problème n° 3 :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Polynôme caractéristique de M :

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = -\lambda\left[\lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2\right]$$

Donc le polynôme caractéristique de M est

$$= \lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = \boxed{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0}$$

2°) Donc les valeurs propres de M sont 0, 1 et 2.

Nous noterons $E_\lambda$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$

- $E_0$ a pour équations $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$E_0$ est donc la droite engendrée par $(0,0,1)$

- $E_1$ a pour équations $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$E_1$ est la droite engendrée par $(1,1,1)$

• $E_2$ a pour équation $\begin{cases} x-2y=0 \\ x-2y=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$

$E_2$ est la droite engendrée par $(4,2,1)$

3°) M est diagonalisable, par le critère 1, puisqu'elle admet 3 valeurs propres distinctes et comme on est en dimension 3.

4°) Soit $N=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) On a :

$$\det(N-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Donc l'équation caractéristique de N est :

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

la même que celle de M.

D'où M et N ont les mêmes valeurs propres.

b) Comme M et N ont les mêmes valeurs propres, alors $M = P_1 D P_1^{-1}$ ou $D = P_1^{-1} M P_1$

avec $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et $\exists\, P_2$ inversible telle que

$$N = P_2 D P_2^{-1} \quad \text{ou} \quad D = P_2^{-1} N P_2$$

Alors $P_1^{-1} M P_1 = P_2^{-1} N P_2$

$$\Rightarrow \underline{N = P M P^{-1}}$$

avec $P = P_2 P_1^{-1}$

et bien sur $P$ inversible $P^{-1} = P_1 P_2^{-1}$

$P_2$ ?

- $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ qcq} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

le 1^er vecteur propre est $(1,0,0)$

- $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y - z = x \\ 3y - 2z = y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = z \end{cases}$$

le $2^{\text{eme}}$ vecteur propre est $(2, 1, 1)$

- $N\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y - z = 2x \\ 3y - 2z = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{5}x \\ y = 2z \end{cases}$$

le $3^{\text{eme}}$ vecteur propre est $\left(\frac{5}{2}, 2, 1\right)$

Donc $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$