

Contrôle final de Statistique Descriptive II
 (Durée : 1 heure 30 min)

Exercice 1 :

On considère les quantités acquises (en milliers d'unités) par une entreprise commerciale durant les trois dernières années:

Années	Trimestres			
	1	2	3	4
2010	12	33	25	45
2011	9	41	40	41
2012	20	30	33	57

On suppose que le modèle, de la série chronologique en question, est multiplicatif.

- 1) Calculer les moyennes mobiles de longueur 3.
- 2) Calculer les indices saisonniers pour chaque trimestre.
- 3) Déterminer la variation résiduelle.
- 4) Appliquer la méthode exponentielle de lissage avec $\theta=0,25$.
- 5) Déterminer la tendance de cette série en utilisant la méthode des moindres carrés.
- 6) Donner une prévision des quantités acquises pendant le premier trimestre de 2013.
- 7) Étudier la qualité de ce modèle en calculant le coefficient de corrélation linéaire. Conclure.

Exercice 2 :

Le tableau suivant donne les prix et les quantités de trois produits 1,2 et 3 pour les années 2008 et 2012 :

Produits	Prix		Quantités	
	2008	2012	2008	2012
1	12	15	300	450
2	18	26	780	1024
3	34	45	234	350

En considérant que l'année courante est 2012 et que l'année de base est 2008, donner la formule, calculer les indices suivants (dans le cas de l'indice des moyennes) et interpréter les résultats:

- 1) l'indice de Paasche des prix.
- 2) l'indice de Laspeyres des quantités.

Bonne chance !

Sujet Prime

Ex. I

1°) les moyennes mobiles de longueur 3 :

Dates	Années	Trimestres	Y_t	MM3	$Y_t/MM3$
1	2020	1	12	—	—
2		2	33	23,33	1,42
3		3	25	34,33	0,73
4		4	45	26,33	1,71
5	2021	1	9	31,67	0,29
6		2	41	30	1,37
7		3	40	40,67	0,98
8		4	41	33,67	1,22
9	2022	1	20	30,33	0,66
10		2	30	27,67	1,08
11		3	33	40	0,825
12		4	57	—	—

Soit, $Y_t = T_t C_t S_t R_t$, le modèle multiplicatif
 $MM_3 = T_t C_t$ sont les moyennes mobiles d'ordre 3

$$\Rightarrow \frac{Y_t}{MM_3} = S_t R_t$$

2°) Indices saisonniers pour chaque trimestre:

trimestres	1	2	3	4	Total
Années					
2010	—	1,42	0,73	1,71	
2011	0,29	1,37	0,98	1,22	
2012	0,66	1,08	0,825	—	
Moyennes	0,475	1,29	0,845	1,465	4,075
Indice saisonniers	0,466	1,27	0,829	1,438	

$S_t R_t$ (bracketed around 2010-2012 rows)
 S_t (with arrow pointing to the bottom row)

3°) La variation résiduelle:

On divise les valeurs du tableau précédent ($S_t R_t$) par celles de la dernière ligne du même tableau (S_t).
on obtient $\frac{S_t R_t}{S_t} = R_t$ qui viennent dans le tableau suivant:

Trimestres \ Années	1	2	3	4
2010	—	1,118	0,88	1,189
2011	0,622	1,079	1,182	0,848
2012	1,416	0,850	0,995	—

4°) Lissage exponentielle avec $\theta = 0,25$

Soit X_t la série lissée à la date t ,

et Y_t la série en étude " " " "

La formule est: $X_t = \theta Y_t + (1 - \theta) X_{t-1}$; $t \geq 2$

$$X_1 = Y_1$$

Dates	Y_t	$X_t = 0,25 Y_t + 0,75 X_{t-1}$
1	12	12
2	33	$0,25 \times 33 + 0,75 \times 12 = 17,25$
3	25	$0,25 \times 25 + 0,75 \times 17,25 = 19,1875$
4	45	$0,25 \times 45 + 0,75 \times 19,1875 = 25,641$
5	9	$0,25 \times 9 + 0,75 \times 25,641 = 21,481$
6	41	$0,25 \times 41 + 0,75 \times 21,481 = 26,361$
7	40	$0,25 \times 40 + 0,75 \times 26,361 = 29,771$
8	41	$0,25 \times 41 + 0,75 \times 29,771 = 32,578$
9	20	$0,25 \times 20 + 0,75 \times 32,578 = 29,433$
10	30	$0,25 \times 30 + 0,75 \times 29,433 = 29,575$
11	33	$0,25 \times 33 + 0,75 \times 29,575 = 30,431$
12	57	$0,25 \times 57 + 0,75 \times 30,431 = 37,073$

5°) Détermination de la tendance à l'aide de la méthode des moindres carrés:

t	y _t	t y _t	t ²	y _t ²
1	12	12	1	144
2	33	66	4	1089
3	25	75	9	625
4	45	180	16	2025
5	9	45	25	81
6	41	246	36	1681
7	40	280	49	1600
8	41	328	64	1681
9	20	180	81	400
10	30	300	100	900
11	33	363	121	1089
12	57	684	144	3249
78	386	2759	650	14564

$$\bar{y}_t = \frac{1}{n} \sum y_t$$

$$= \frac{386}{12} = 32,167$$

$$\bar{t} = \frac{78}{12} = 6,5$$

$$y_t = at + b$$

avec $a = \frac{\text{Cov}(y_t, t)}{\text{Var}(t)}$

et $b = \bar{y}_t - a \bar{t}$

$$a = \frac{\sum t y_t - \bar{y} \sum t}{\sum t^2 - \bar{t} \sum t} = \frac{2759 - (32,167 \times 78)}{650 - (6,5 \times 78)}$$

$$a = \frac{2759 - 2509,026}{650 - 507} = \frac{249,974}{143} = 1,748$$

$$b = 32,167 - (1,748 \times 6,5) = 32,167 - 11,362 = 20,805$$

Donc la droite cherchée est :

$$Y_t = 1,748t + 20,805$$

6°) Prévision pour le premier trimestre de 2013 :

$$\Rightarrow t=13 \Rightarrow Y_{13} = 1,748 \times 13 + 20,805$$

$$\Rightarrow Y_{13} = 22,724 + 20,805 = 43,529$$

ou encore $\hat{Y}_{13} = 43,529 \times S_{13} = 43,529 \times 0,466$

$$\Rightarrow \hat{Y}_{13} = 20,284$$

7°) Qualité de la représentation à l'aide de la corrélation linéaire :

$$r = \frac{\text{Cov}(t, Y_t)}{\sigma(t) \sigma(Y)} = \frac{249,974}{\sqrt{143} \cdot \sqrt{\sum Y^2 - \bar{Y} \sum Y}}$$

$$r = \frac{249,974}{\sqrt{143} \cdot \sqrt{14564 - (32,167 \times 386)}}$$

$$r = \frac{249,974}{11,96 \times \sqrt{14564 - 12416,462}}$$

$$r = \frac{249,974}{11,96 \times \sqrt{2147,538}} = \frac{249,974}{11,96 \times 46,341}$$

$$r = \frac{249,974}{554,245} = 0,451$$

Faible, ou mauvaise représentation 0,5

Ex. 2:

Produits	↓		↓		↓	
	Q ₂₀₀₈	P ₂₀₀₈	Q ₂₀₀₈	P ₂₀₁₂	Q ₂₀₁₂	P ₂₀₁₂
1	3600		4500		6750	5400
2	14040		20280		26624	18432
3	7956		10530		15750	11900
Total	25596		35310		49124	35732

1°) Indice de Paasche des prix (cas de l'indice des moyennes)

$$I_P = \frac{\sum Q_t P_t}{\sum Q_t P_0} \times 100$$

Donc:

$$I_{2012/2008} (\text{prix}) = \frac{\sum Q_{2012} P_{2012}}{\sum Q_{2012} P_{2008}} \times 100$$

$$= \frac{49124}{35732} \times 100 = 137,48 \% \quad \uparrow$$

Le résultat signifie qu'on dépense 137,48 DH en 2012 pour se procurer les mêmes quantités de produits qui coûtaient 100 DH en 2008. C'est-à-dire que l'augmentation entre ces deux années a été de 37,48 %.

2°) Indice de Laspeyres des quantités (cas de l'indice des moyennes) :

$$L_Q = \frac{\sum P_0 Q_t}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

Donc :

$$L_{2012/2008} \text{ (quantités)} = \frac{\sum P_{2008} Q_{2012} \times 100}{\sum P_{2008} Q_{2008}}$$

$$= \frac{35732}{25596} \times 100$$

$$= 139,60 \%$$

Le résultat signifie que entre l'année 2008 et 2012, il y avait une augmentation des quantités consommées de 39,60%.

Bien sûr cette augmentation des quantités consommées a été accompagnée par une augmentation des prix déjà vue en 1°).