Fonction génératrice des moments:

- La fonction génératrice des moments est définie pour toute v.a. X par:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X = x) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Si $E(e^{tX})$ existe dans un voisinage de l'origine.

Théorème:

Si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0,t_0[$, $t_0>0$, alors ses dérivées de tout ordre existent pour $t=0$

et de plus $M^{(k)}(0)=E(X^k)$, $k = 0,1,2,\ldots$

<u>C'est-à-dire que:</u>

Tout les moments d'ordre k peuvent être calculés à l'aide des dérivées de $M(t)$ au point $t=0$.

- En effet, $M'(t) = \dfrac{d}{dt} E\left(e^{tX}\right)$

<u>Si X est discrète:</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx} P\left(X = x\right)\right] = \sum_x \frac{d}{dt} e^{tx} P\left(X = x\right)$$

$$= \sum_x x e^{tx} P\left(X = x\right) = E\left(X e^{tX}\right)$$

<u>Si X est continue:</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f(x) dx = E\left(X e^{tX}\right)$$

- En posant t=0, on a $M'(0)=E(X)$.
- De même,

$$M''(t) = \frac{d}{dt} M'(t) = \frac{d}{dt} E\left(X e^{tX}\right) = E\left(X^2 e^{tX}\right)$$

et $M''(0) = E\left(X^2\right)$

D'une façon générale, on a:

$$M^{(k)}(t) = E\left(X^k e^{tX}\right),\ k \geq 1$$

et $$M^{(k)}(0) = E\left(X^k\right)$$

- Où encore, d'après le théorème précédent, Si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0,t_0[$, $t_0>0$, alors on peut développer $M(t)$ en série de Mc-Laurin:

$$M(t) = M(0) + M'(0)\cdot\frac{t}{1!} + M''(0)\cdot\frac{t^2}{2!} + \cdots + M^{(k)}(0)\cdot\frac{t^k}{k!} + \cdots$$

- Ainsi $E(X^k)$ est le coefficient de $\frac{t^k}{k!}$

Remarque:

- La fonction génératrice des moments $M(t)$ peut ne pas exister.
- En effet, $E(e^{tX})$ n'est pas toujours définie.

Exemple 1:

- Soit X une v.a. discrète définie par:

$$P(X = k) = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}; \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- Donc, on a:

$$M(t) = \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{tk}}{k^2} = \infty$$

Exemple 2:

- Soit X une v.a. continue de fonction de densité

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad x > 0$$

- Donc $M(t) = \dfrac{1}{1-2t}$ pour t<1/2

$M'(t) = \dfrac{2}{(1-2t)^2}$ et $M''(t) = \dfrac{8}{(1-2t)^3}$ pour t<1/2

On en déduit $E(X)$=2, $E(X^2)$=8 et $Var(X)$=4.

Exemple 3:

- Soit X une v.a. continue de densité de probabilité la fonction $f(x)=ce^{-|x|^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$, $x \in IR$, où c est une constante déterminée par la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
- Pour $t>0$, on a: $\int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x^{\alpha}} dx = \int_0^{\infty} e^{x\left(t-x^{\alpha-1}\right)} dx$

et puisque α-1<0, $\int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x^{\alpha}} dx$ n'est pas finie pour $t>0$; car

$$e^{x\left(t-x^{\alpha-1}\right)} \underset{x\to\infty}{\sim} e^{tx}$$

9

- D'où $M(t)$ n'existe pas!
- Pourtant,

$$E\left(|X|^{n}\right)=c\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{n} e^{-|x|^{\alpha}} dx = 2c\int_0^{\infty} x^{n} e^{-x^{\alpha}} dx$$

- Par un changement de variable $y=x^{\alpha}$, on obtient:

$$E\left(|X|^{n}\right)=\frac{2c}{\alpha}\int_0^{\infty} y^{\frac{n+1}{\alpha}-1} e^{-y} dy = \frac{2c}{\alpha}\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)<\infty *$$

- On remarque, donc, que même si $M(t)$ est infini, les moments peuvent être finis.

$*\,\Gamma$ est la fonction gamma d'Euler.

10

Fonction Gamma Γ d'Euler:

La fonction Γ est définie sur]0,+∞[par:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

Propriétés:

1) $\boxed{\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).}$

En effet,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt=(\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-2}dt=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

2) $\boxed{\Gamma(1)=1.}$

En effet, $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=1$

3) $\boxed{\Gamma(n)=(n-1)!}$

En effet, $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=$

$=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots=(n-1)!\Gamma(1)=(n-1)!$

Lois de probabilités usuelles discrètes et continues

Lois de probabilités discrètes

Loi de Dirac:

- Soit un nombre a fixé et soit une v.a. X prenant la valeur a, c'est-à-dire $P(X=a)=1$.

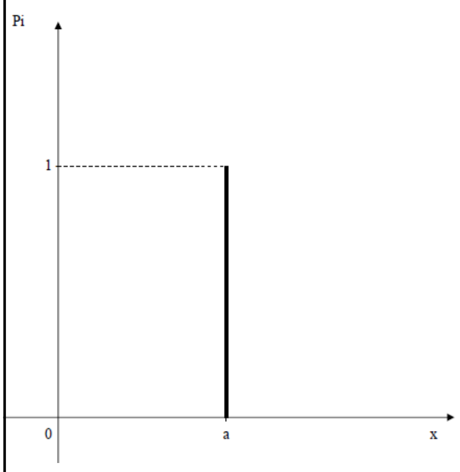
On appelle loi de Dirac au point a la probabilité

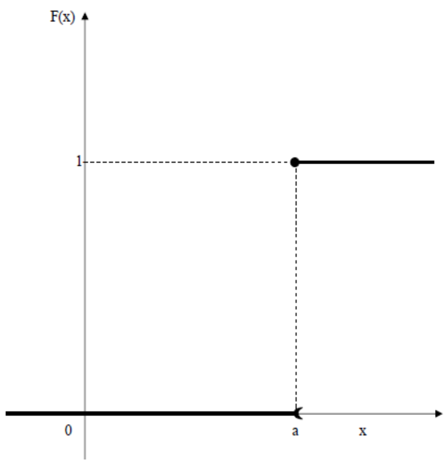
$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

La représentation de l'histogramme et de la fonction de répartition sont:

15

Loi de Dirac:





16

Loi de Dirac:

- Sa fonction de répartition:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \ \ x < a \\ 1, & si \ \ x \geq a \end{cases}$$

- Son espérance mathématique est $E(X)=a$ et $E(X^2)=a^2$
- Sa variance est $Var(X)=0$

Loi de Bernoulli:

- Une v. a. X suit une loi de Bernoulli si elle prend les deux valeurs 1 et 0 avec $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=q$ où $p+q=1$.
- p s'appelle paramètre de la loi.
- $\{X=1\}$ est dit événement succès et $\{X=0\}$ est dit événement échec.
- X représente donc le nombre de succès obtenu après la réalisation d'une seule expérience aléatoire.

Loi de Bernoulli:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	1	0	Σp_i
p_i	p	q=1-p	1

Alors $E(X)=\Sigma x_i p_i=1xp+0xq=p$

$Var(X)=\Sigma x_i^2 p_i - E(X)^2 = x_1^2 p + x_0^2 q - p^2 = p - p^2$

$Var(X)=p(1-p)=pq$

Loi Binômiale:

- On considère l'expérience qui consiste en n répétitions indépendantes d'une même expérience dont l'issue est l'apparition ou la non apparition d'un événement A qui:
  - Soit se réalise avec la probabilité p (p=probabilité du succès).
  - Soit ne se réalise pas avec la probabilité $q=1-p$ (q=probabilité d'échec).
- Soit X le nombre d'apparitions de cet événement parmi ces n expériences.
- On a $\Omega=\{A,\bar{A}\}^n$ et $0\leq X\leq n$.

Loi Binômiale:

- On cherche $P(X=k)$. Le résultat de ces n expériences est une suite $(A_1, A_2,\ldots, A_n)$ où $A_i=A$ ou $\bar{A}$, pour tout i=1,2,…,n.
- Si on suppose que A est apparu k fois et $\bar{A}$ $(n\text{-}k)$ fois, la probabilité d'une de ces suites $(A_1, A_2,\ldots, A_n)$ est $p^k(1\text{-}p)^{n\text{-}k}$. Comme il existe C_n^k suites $(A_1, A_2,\ldots, A_n)$ où A est apparu k fois et $\bar{A}$ $(n\text{-}k)$ fois, on déduit que:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k};\quad 0\le k\le n.$$

Loi Binômiale:

- On vérifie que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$
- En effet, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$
- On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on la note symboliquement *B(n, p).*
- *On écrit $X \sim$ B(n,p)*

Loi Binômiale:

- Espérance mathématique: $E(X)=np$
- Variance mathématique: $Var(X)=npq$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{npq}$
- La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes répétés de manière indépendante pouvant prendre deux états, tels que: succès ou échec, tout ou rien.

Loi multinomiale:

- Supposons que dans une expérience aléatoire peuvent se présenter les événements $A_1,A_2,\ldots,A_k$ qui forment un système des événements exhaustifs et mutuellement exclusifs (complet),
- $P(A_i)=p_i$ et $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$ et calculons la probabilité qu'en faisant n expériences indépendantes on ait x_1 fois l'evénement A_1, x_2 fois A_2,…etc, où $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$.

Loi multinomiale:

- Cette probabilité est donnée par:

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \ si \ n = \sum_{i=1}^{k} x_i$$

et zéro, autrement. Avec $X_i = x_i$ signifie que l'événement A_i s'est réalisé x_i fois.

- Alors, on dit que la variable $(X_1, \ldots, X_k)$ suit une loi multinomiale de paramètres n, p_1, $p_2, \ldots, p_k$
- Si k=2, on retrouve la loi binomiale.

Loi multinomiale:

- Les principales moments de cette loi sont:

$$E(X_i) = np_i$$

$$Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

$$Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$$

Exemple:

- Considérons la loi trinômiale:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$$

où $(x, y) \in \mathbf{Z}_+^2$ et $p_j \geq 0$ avec $p_1+p_2+p_3=1$.

- La loi marginale de X est B(n,p_1).
- La loi marginale de Y est B(n,p_2).

Exemple:

$$P(X = x) = \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p_1^x \sum_{y=0}^{n-x} \frac{(n-x)!}{y!\,(n-x-y)!} p_2^y p_3^{n-x-y}$$

$$= C_n^x p_1^x (p_2 + p_3)^{n-x}$$

$$= C_n^x p_1^x (1 - p_1)^{n-x}$$