Variables aléatoires

Prof. Mohamed El Merouani

Variable aléatoire

- On entend par variable aléatoire (v.a.) une grandeur qui à la suite d'une expérience aléatoire prend telle ou telle valeur.
- Suivant la notation ensembliste, une v.a. X est une fonction d'un événement élémentaire ω: $X=f(\omega)$ où $\omega \in \Omega$. La valeur de cette fonction dépend de l'événement élémentaire ω apparu à la suite de l'expérience.

Définition d'une v.a.

- Soient $(\Omega,\mathscr{A})$ et $(\Omega',\mathscr{A}')$deux espaces probabilisables. L'application $X:\Omega \longrightarrow \Omega'$ est dite variable aléatoire lorsque pour tout $B \in \mathscr{A}'$,
  on a: $X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega / X(\omega)\in B\} \in \mathscr{A}$
- Si $\Omega'=IR$, on prend pour $\mathscr{A}'$ la plus petite tribu contenant les intervalles de IR. $\mathscr{A}'$, est dans ce cas, dite tribu des boréliens de IR. On note $\mathscr{A}'=\mathscr{B}_{IR}$. Dans ce cas X est variable aléatoire réelle notée v.a.r.

Variable aléatoire réelle

- Donc, une v.a.r *X* est une application de l'ensemble fondamental *Ω* dans l'ensemble *IR* des nombres réels

$X:\Omega \longrightarrow IR$ qui

vérifie $\forall I \in \mathscr{B}_{IR}$, ona $X^{-1}(I)=\{\omega\in\Omega / X(\omega)\in I\} \in \mathscr{A}$

- Les valeurs de la variable X sont dites réalisations de X.
- L'ensemble de ces réalisations est noté $X(\Omega)$.

Loi de probabilité d'une v.a.r.

- Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et X une v.a.r.
- L'application, notée P_X, définie par

$$P_X : \mathcal{B}_{IR} \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto P_X(B)=P(X^{-1}(B))$$

est une probabilité sur $(IR, \mathcal{B}_{IR})$, et appelée loi de probabilité de X.

5

Démonstration:

- $P_X(IR)=P(X^{-1}(IR))=P(\Omega)=1$
- Pour toute famille $(B_i)_{i\geq 1}$ d'événements 2 à 2 incompatibles;

$$P_X\left(\bigcup_{i\geq 1} B_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i\geq 1} B_i\right)\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{i\geq 1} X^{-1}(B_i)\right)$$
$$= \sum_{i\geq 1} P\left(X^{-1}(B_i)\right)$$
$$= \sum_{i\geq 1} P_X(B_i)$$

6

Variable aléatoire discrète

- Une variable aléatoire X est dite discrète si X(Ω) a un nombre fini (ou infini dénombrable) d'éléments.
- Soient $x_1, x_2,\ldots,x_n$ les réalisations de X. On note pour tout i=1,2,…,n $X^{-1}(\{xi\})=\{\omega \in \Omega / X(\omega)=x_i\}=(X=x_i)$
- Les événements $(X=x_i)$ forment un système complet et $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète:

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est définie par la donnée de:

- $x_1, x_2,\ldots,x_n$ les réalisations de la v.a. X.
- $p_1, p_2,\ldots,p_n$ les probabilités des événements $(X=x_i)$; c'est-à-dire $P(X=x_i)=p_i$; pour i=1,2,…,n

Exemple:

Pour l'expérience du lancement d'un dé.
L'ensemble fondamental est $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
et soit

$\mathscr{A}=\{\emptyset; \{1,4\}; \{2,5\}; \{3,6\}; \{2,3,5,6\}; \{1,3,4,6\}; \{1,2,4,5\}; \Omega\}$

Soit X l'application de Ω dans IR telle que X(ω) soit le reste de ω modulo 3.

Exemple (suite)

On a: $X(\Omega)=\{0,1,2\}$ et
$(X=0)=X^{-1}(\{0\})=\{3,6\}\in A$;
$(X=1)=X^{-1}(\{1\})=\{1,4\} \in A$;
$(X=2)=X^{-1}(\{2\})=\{2,5\}\in A$;
X est une v.a.r.
et $P(X=0)=1/3$; $P(X=1)=1/3$; $P(X=2)=1/3$.
On vérifie que: $\sum_i P(X=x_i)=1$

en effet; $P(X=0)+ P(X=1)+P(X=2)=1$

Variable aléatoire continue

- Une variable aléatoire X est dite continue si X(Ω) est un ensemble infini non dénombrable.
- Une v.a.r. X est dite continue si X(Ω) est un intervalle ou une réunion d'intervalles de IR.
- Les valeurs que prend X sont infinies non dénombrables, alors la probabilité de ces valeurs est une fonction continue f, appelée fonction densité de probabilité.

Propriétés de la densité de probabilité:

1. La fonction f est à valeurs positives sur IR:
   $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in IR.$
1. La fonction f est continue sauf peut être en un nombre fini (dénombrable) de points de IR.
2. L'intégrale de f sur IR converge et est égale à 1.

$$\int_{IR} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue:

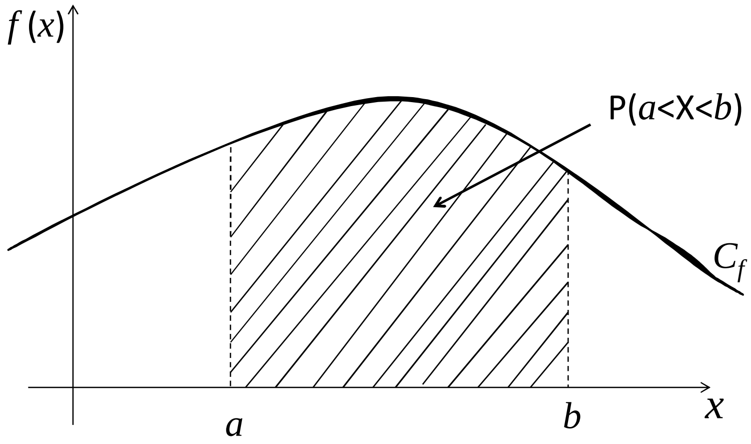
- On rappelle que la loi d'une v.a.r. X sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ est une probabilité sur $(IR, \mathscr{B}_{IR})$ définie par $\forall B \in \mathscr{B}_{IR}$
  $P_X(B)=P(X^{-1}(B))$.
- Si X est une v.a. continue de fonction de densité f alors sa loi de probabilité est donnée par $\forall B \in \mathscr{B}_{IR}$ on a:

$$P_X(B) = \int_B f(x)\,dx$$

13

- La probabilité de tout intervalle $]a,b[$ est égale à

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



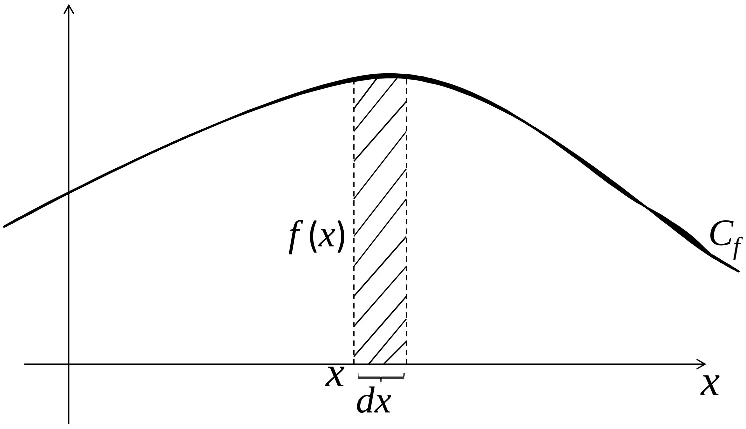
Prof. Mohamed El Merouani

14

- Intuitivement, on peut écrire

$$f(x)dx=P(x<X<x+dx)$$

où dx est considéré comme « infiniment petit ».



Fonction de répartition d'une v.a.r.:

- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r.. On appelle fonction de répartition de la v.a.r. X, l'application F: IR—>[0,1] définie par:
  pour tout $x \in$IR: $F(x)=P(X\leq x)$
  $=P_X(]-\infty,x])$
  $=P(X^{-1}]-\infty,x])$.
- Si X est discrète: $F(x)=\sum_{x_i\leq x} P(X=x_i)=\sum_{x_i\leq x} p_i$
- Si X est continue de fonction de densité f:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Proposition:

La fonction de répartition F d'une v.a.r. X satisfait les propriétés suivantes:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
2) F est une fonction croissante,
3) F est continue à droite en tout point x de IR.
4) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Démonstration:

1) Cette propriété est évidente.
2) Prenons deux nombres réels x et x' tels que $x \leq x'$. Alors $]-\infty,x] \subset]-\infty,x']$.
   D'où $P_X(]-\infty,x]) \leq P_X(]-\infty,x'])$
   et par conséquent $F(x) \leq F(x')$.

Démonstration (suite):

3) Soit $(x_n)_n$ une suite décroissante de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

avec $A_n = (X \le x_n)$ mais $(X \le x_n) \supset (X \le x_{n+1})$

car la suite $(x_n)_n$ est décroissante.

Donc $(A_n)_n$ décroissante et $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \le x_n) = (X \le x_0)$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X \le x_n) = P(X \le x_0) = F(x_0)$

Démonstration (suite):

4) La suite des événements $(X \le -n)$; n=1,2,3,… est décroissante et $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \le -n) = \varnothing$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} F(-n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X \le -n) = P(\varnothing) = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

Démonstration (suite):

La seconde relation s'obtient en considérant la suite croissante (X≤n), n=1,2,3,... et $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = IR$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} F(n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \le n) = P(IR) = 1$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Remarques:

1. La fonction de répartition permet de calculer les probabilités concernant les intervalles.

   On a: $\boxed{P(a<X\le b)=F(b)-F(a)}$

<u>En effet:</u>

$$\begin{aligned}P(a<X\le b) &= P(a<X \text{ et } X\le b) = P((a<X)\cap(X\le b))\\ &= P(a<X)+P(X\le b)-P((a<X)\cup(X\le b))\\ &= 1-P(X\le a)+P(X\le b)-P(IR)\\ &= P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

Remarques:

2. On peut démontrer que toute fonction $F(x)$ vérifiant les propriétés précédentes représente la fonction de répartition d'une certaine v.a.

Exemple précédent:

L'expérience « lancement d'un dé »

On a X la v.a. définie sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ par $X(\omega)$ reste de ω modulo 3, $\forall\omega\in\Omega$. On a trouvé:

xi	0	1	2
pi	1/3	1/3	1/3

donc

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ \ x<0 \\ 1/3 & si\ \ 0\le x<1 \\ 2/3 & si\ \ 1\le x<2 \\ 1 & si\ \ x\ge 2 \end{cases}$$

Remarque:

- Si X prend une suite (finie ou infinie) de valeurs $x_1<x_2<x_3<\ldots$, la fonction de répartition F de X est une fonction en escalier croissante, discontinue en $x_1,x_2,x_3,\ldots,$. Le saut en x_i vaut $P(X=x_i)$.
- La fonction F est continue en tout point x tel que $x \notin X(\Omega)$.
- F est constante sur tout intervalle $[x_k,x_{k+1}[$; k=1,2,3…; $x_k \in X(\Omega)$.

Exemple:

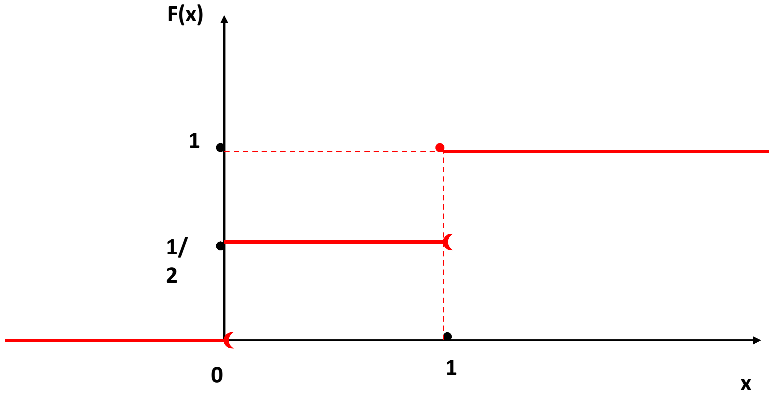
- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a la loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- Sa fonction de répartition sera:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1/2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Représentation graphique de F(x):



Exemple 3:

Soit $\Omega=\{(i,j)/\ i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ et soit $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$.

Soit $P((i,j))=\frac{1}{36}\ ,\ \forall (i,j)\in\Omega$

On définit la v.a. $X(i,j) = i+j\ ;\ 1 \leq i,j \leq 6$

La loi de probabilité de X est donnée par:

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

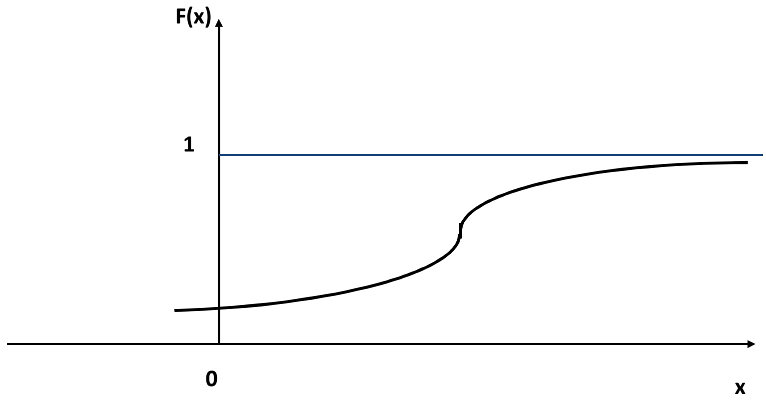
Donc, sa fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 2 \\ 1/36 & si \;\; 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & si \;\; 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & si \;\; 4 \leq x < 5 \\ & \vdots \\ 35/36 & si \;\; 11 \leq x < 12 \\ 1 & si \;\; x \geq 12 \end{cases}$$

Remarques (Fonction de répartition d'une v.a. continue):

- On définit la fonction de répartition F d'une v. a. continue X de la même manière que pour une v.a. discrète, c'est-à-dire $F(x)=P(X\leq x)$.
- La fonction continue $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est croissante de 0 à 1 lorsque x varie de -∞ à +∞.
- Par conséquent, une v.a. continue est une v.a. dont la fonction de répartition est continue.
- Si la fonction de densité f d'une v.a. continue X est continue au point x alors f est la dérivée de da fonction de répartition F, c'est-à-dire $F'(x)=f(x)$.

Représentation graphique de F(x) continue:



Conséquences:

Pour *X* v.a. continue on a:

- *P(X=c)=0* avec *c* une constante réelle.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

$$= \int_a^b f(t)dt$$

- $P(X \leq a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$
- $P(X \geq b) = P(X > b) = \int_b^{+\infty} f(t)dt$

Exemple:

Soit f la fonction de densité, d'une v.a. continue X, définie par:

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ 0<x\leq 1 \\ 2-x & si\ 1<x\leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Trouver $F(x)$.
2. Calculer $P(0{,}3<X\leq 1{,}5)$

Exemple (suite):

1. Si $x\leq 0$; $F(x)=0$

Si $0<x\leq 1$; $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{2}$

Si $1<x\leq 2$; $F(x)=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x (2-t)dt=2x-\frac{x^2}{2}-1$

Si $x\geq 2$; $F(x)=1$

2. $P(0{,}3<X\leq 1{,}5)=F(1{,}5)-F(0{,}3)=0{,}83$

Loi d'une fonction d'une v.a. discrète:

Soit une v.a. discrète X telle que $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans un ensemble $E=\{y_1,y_2,\ldots\}$.

Alors $Y=g(X)$ est une v.a. discrète telle que:

$$\forall j \;,\; (Y=y_j)=\bigcup_{i\in I}(X=x_i) \quad \text{où} \quad I=\{i \,/\, g(x_i)=y_j\}$$

D'où $$P(Y=y_j)=\sum_{i\in I}P(X=x_i)$$

Exemple:

Soit la v.a. discrète X de loi de probabilité:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3

On cherche la loi de la v.a.:

a) $Y=X^2+1$

b) $Z=|X|$

Exemple (suite):

a) Y prend les valeurs 1,2,5 avec les probabilités:

$P(Y=1)=P(X=0)=0{,}3$

$P(Y=2)=P(X=-1)+P(X=1)=0{,}1+0{,}2=0{,}3$

$P(Y=5)=P(X=-2)+P(X=2)=0{,}1+0{,}3=0{,}4$

D'où

y_j	1	2	5
$P(Y=y_j)$	0,3	0,3	0,4

Exemple (suite):

b) De la même façon on trouve:

z_j	0	1	2
$P(Z=z_j)$	0,3	0,3	0,4

Loi d'une fonction d'une v.a. continue:

Soit une v.a. continue X de densité de probabilité f et soit $Y=g(X)$ dérivable pour tout x et telle que

$g'(x)>0, \forall x$ ou $g'(x)<0, \forall x.$

Alors $Y=g(X)$ est une v.a. continue dont la densité de probabilité est donnée par:

$$\boxed{h(y)=f\,[g^{-1}(y)]\,|(g^{-1}(y))'|}$$

Loi d'une fonction d'une v.a. continue:

- Si $g'(x)>0$, pour tout x, on a: $Y=g(X) \Leftrightarrow X=g^{-1}(Y)$
  et $P(Y\leq y)=P(g(X)\leq y)=P(X\leq g^{-1}(y))$
  d'où $H(y)=F(g^{-1}(y))$ (ou H est la fonction de répartition de Y). En dérivant, on obtient:
  $h(y)=f\,(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$
- Si $g'(x)<0$, pour tout x, on a: $Y=g(X) \Leftrightarrow X=g^{-1}(Y)$
  et $P(Y\leq y)=P(g(X)\leq y)=P(X\geq g^{-1}(y))=1-P(X<g^{-1}(y))$
  d'où $H(y)=1-F(g^{-1}(y))$
  En dérivant, on obtient: $h(y)=-f\,(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$
  $(car\ g'<0)$

Exemple:

Soit X v.a. de densité de probabilité:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ 0 < x < 1 \\ 0 \ \ autrement \end{cases}$$

Cherchons les densités de:

a) Y=e^X

b) Z=-2Log$X$

Exemple (suite):

a) Y=e^X ⇔ X=LogY avec y>0 pour tout x

et nous avons $h(y) = \left|\frac{1}{y}\right|.1, \ \ 0 < Log\ y < 1$

C'est-à-dire que

$$h(y) = \begin{cases} 1/y \ , & 1 < y < e \\ 0 \ , & autrement \end{cases}$$

Exemple (suite):

b) $$h(y) = \left| -\frac{1}{2} e^{-y/2} \right| .1 \quad , \quad 0 < e^{-y/2} < 1$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2}, & 0 < y < \infty \\ 0 \;, & autrement \end{cases}$$

Remarque:

La formule précédente est valable sous la conditions que «la fonction g est dérivable et $g'(x)$ garde un signe constant pour tout x**».**

Contre-exemple

Soit $Y=X^2$. On a $H(y)=P(Y \le y)=P(X^2 \le y)=$

$$= P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y}\right) - F\left(-\sqrt{y}\right)$$

En dérivant, on obtient:

$$h(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f\left(\sqrt{y}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f\left(-\sqrt{y}\right)$$

Espérance mathématique:

v.a. discrète:

- L'espérance mathématique d'une v. a. discrète X, notée E(X) est:

$$E(X) = \sum_i x_i\, P(X = x_i) = \sum_i x_i\, p_i$$

v.a. continue:

- L'espérance mathématique d'une v. a. continue X, de fonction de densité *f* est donnée par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Remarque:

Dans le cas discret:

Lorsque X(Ω) est fini, $\sum_i x_i\, p_i$ est finie.

Si X(Ω) est infini, on a la somme d'une série qui peut ne pas exister.

Dans le cas continue:

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ peut être divergente. Dans ces cas l'espérance mathématique n'existe pas.

Exemple 1:

- Soit une v.a. X de loi donnée par:

$$p_i = P\left(X = \frac{3^i}{i}\right) = \frac{2}{3^i}\ ;\ i = 1,2,3\ldots$$

- Alors

$$\sum_{i=1} x_i\, p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{i} \cdot \frac{2}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i} \to \infty$$

- Donc, l'espérance mathématique n'existe pas.

47

Exemple 2:

Soit une v.a. X continue de densité de probabilité: $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\ ,\ x \in IR$

Posons $t=1+x^2$, on obtient

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\left[Log\, t\right]_1^{\infty} \to \infty$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$ est divergente.

D'où E(X) n'existe pas

48

Exercice:

On considère l'expérience du lancement d'un dé à six faces. On considère la variable aléatoire X qui fait correspondre à chaque résultat le numéro obtenu en lançant ce dé.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer E(X).
3. Donner sa fonction de répartition et représenter-la graphiquement.

Solution:

1. Loi de X:

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum p_i$
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

2. Son éspérance est:

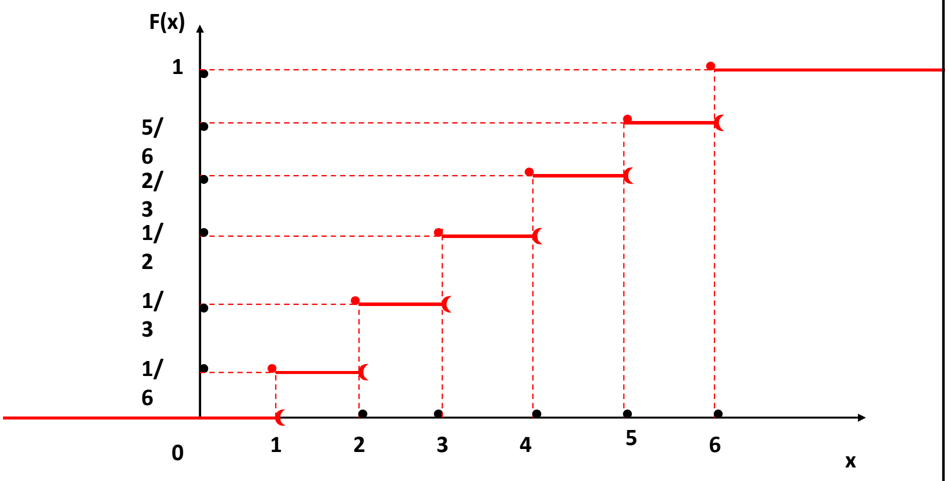
$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i\, p_i = \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}=\frac{21}{6}$$

3. On a:

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum p_i$
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<1 \\ 1/6 & si\ 1\le x<2 \\ 1/3 & si\ 2\le x<3 \\ 1/2 & si\ 3\le x<4 \\ 2/3 & si\ 4\le x<5 \\ 5/6 & si\ 5\le x<6 \\ 1 & si\ x\ge 6 \end{cases}$$

Représentation graphique de F(x):



Exemple 3:

Soit X une v. a. continue de fonction de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in [0,1[\\ 0 & si\ x \notin [0,1[\end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une fonction de densité et représenter-la graphiquement.
2. Calculer la probabilité pour que 0,5<X<0,7.
3. Donner sa fonction de répartition et recalculer la probabilité pour que 0,5<X<0,7.
4. Calculer l'espérance mathématique de X.

Corrigé:

1. Pour vérifier que f est bien une fonction de densité, il faut que:

   (a) f soit positive ou nulle: ici, on a

   f(x)=2x≥0 lorsque 0≤x<1

   f(x)=0 lorsque x<0 ou x≥1

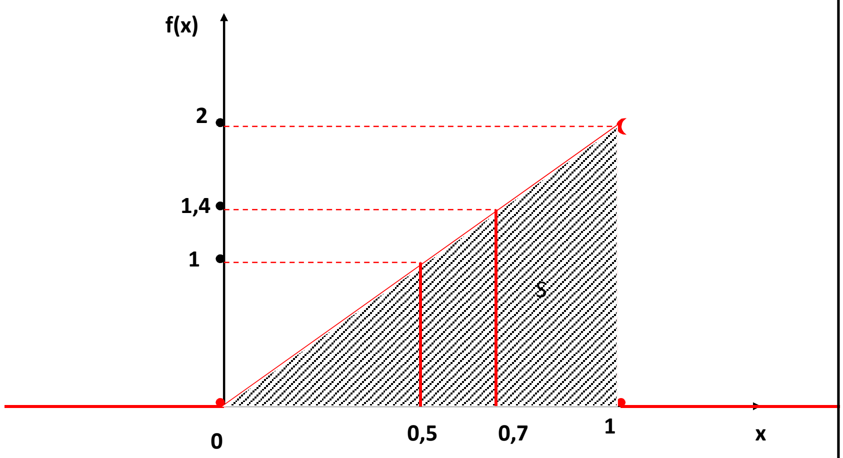
et (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, en effet;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 2x dx + \int_{1}^{+\infty} 0 dx$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 = (1-0) = 1$$

Représentation graphique de f(x):



S=1/2 x 2 x 1 = 1

2. Calcul de la probabilité pour que 0,5<X<0,7

$$P(0,5 < X < 0,7) = \int_{0,5}^{0,7} f(x)dx = \int_{0,5}^{0,7} 2xdx = \left[x^2\right]_{0,5}^{0,7}$$

$$= (0,7)^2 - (0,5)^2 = 0,49 - 0,25 = 0,24$$

3. Par définition $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Pour $x \in [0,1[$

on a: $F(x) = \int_0^x 2tdt = \left[t^2\right]_0^x = x^2$

alors

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0 \\ x^2 & si\, 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\, x \geq 1 \end{cases}$$

On peut maintenant recalculer la probabilité pour que 0,5<X<0,7 de cette façon:

$$P(0{,}5 < X < 0{,}7) = F(0{,}7) - F(0{,}5) = (0{,}7)^2 - (0{,}5)^2 = 0{,}24$$

c'est-à-dire en utilisant la formule:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

4. Espérance mathématique de X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} x(2x)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Couple de variables aléatoires

Définition:

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

- Une application (X,Y) de Ω dans IR^2, qui à tout ω de Ω fait correspondre un couple $(X(\omega),Y(\omega))$ de IR^2, s'appelle couple de variables aléatoires (où X et Y sont deux variables aléatoires).
- (X,Y) s'appelle aussi variable aléatoire à deux dimensions.

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. discrètes:

- Un couple de v. a. (X, Y) peut prendre les valeurs successives suivantes:

$$(x_1,y_1) \; ; (x_1,y_2) \; ; \ldots ; (x_i,y_j) \; ; \ldots ; (x_n,y_m)$$

A chaque couple (x_i,y_j) correspond une probabilité p_{ij} d'observer simultanément la valeur x_i pour X et la valeur y_j pour Y:

$$p_{ij}=P(X=x_i \text{ et } Y=y_j)=P(X=x_i, Y=y_j)$$

- On a

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

$$\forall i = 1,2,\ldots,n; \; \forall j = 1,2,\ldots,m$$

Fonction de répartition d'un couple de v.a. discrètes:

- On appelle fonction de répartition d'une v.a. à deux dimensions (X,Y) la fonction définie par:

$$F(x,y)=P(X \leq x, Y \leq y)=\sum_{x_i \leq x}\sum_{y_j \leq y} P(X=x_i, Y=y_j)$$

Lois de probabilités marginales:

- La probabilité $P(X=x_i)=p_{i.}$ est appelée loi marginale de X. On a:

$$P(X = x_i) = p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$$
$$i = 1,2,\ldots,n$$

- La probabilité $P(Y=y_j)=p_{.j}$ est appelée loi marginale de Y. On a:

$$P(Y = y_j) = p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$$
$$j = 1,2,\ldots,m$$

Y / X	y_1	....	y_j	...	y_m	Total
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1m}	$p_{1.}$
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{im}	$p_{i.}$
x_n	p_{n1}	...	p_{nj}	...	p_{nm}	$p_{n.}$
Total	$p_{.1}$		$p_{.j}$		$p_{.m}$	1

Exemple:

- Une urne contient deux boules rouges, trois vertes et quatre blanches.

  On tire au hasard trois boules de cette urne. En désignant respectivement par X et Y le nombre respectif de boules rouges et vertes tirées, déterminons la loi du couple (X,Y).
- Notons $p_{ij}=P(X=i,\ Y=j)$ par $P(i,j)$, on a:

$$P(0,0)=\frac{C_2^0C_3^0C_4^3}{C_9^3}=0{,}048$$

$$P(0,1)=\frac{C_2^0C_3^1C_4^2}{C_9^3}=0{,}214$$

$$P(0,2)=\frac{C_2^0C_3^2C_4^1}{C_9^3}=0{,}143$$

$$P(0,3)=\frac{C_2^0C_3^3C_4^0}{C_9^3}=0{,}012$$

$$P(1,0)=\frac{C_2^1C_3^0C_4^2}{C_9^3}=0{,}143$$

$$P(1,1)=\frac{C_2^1C_3^1C_4^1}{C_9^3}=0{,}285$$

$$P(1,2)=\frac{C_2^1C_3^2C_4^0}{C_9^3}=0{,}071$$

$$P(2,0)=\frac{C_2^2C_3^0C_4^1}{C_9^3}=0{,}048$$

$$P(2,1)=\frac{C_2^2C_3^1C_4^0}{C_9^3}=0{,}036$$

Exemple:

Y \ X	0	1	2	3	Total
0	0,048	0,214	0,143	0,012	0,417
1	0,143	0,285	0,071	0	0,499
2	0,048	0,036	0	0	0,084
Total	0,239	0,535	0,214	0,012	1

Lois de probabilités conditionnelles:

- La loi conditionnelle de X si $Y=y_j$ est définie par:

$$P(X/Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$$

- De même, la loi conditionnelle de Y si $X=x_i$ est définie par:

$$P(Y/X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}$$

Indépendance de deux variables aléatoires discrètes :

- Deux v. a. discrètes X et Y sont dites indépendantes si

$$P(X=x_i\,,\ Y=y_j)=P(X=x_i).P(Y=y_j)$$

pour tout x_i et y_j.

- Dans ce cas:$P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x).P(Y\leq y)$; pour tout x et y

ou $$F(x,y)=F_X(x).F_Y(y)$$

- Aussi:

$$P(X\,/\,Y=y_j)=P(X=x_i)$$

et $$P(Y\,/\,X=x_i)=P(Y=y_j)$$

Loi d'une somme de variables aléatoires discrètes:

- La probabilité $P(Z=k)$ de la somme $Z=X+Y$ de deux variables aléatoires X, Y est la somme des probabilités $P(X=i,\ Y=j)$ étendue à tous les couples (i,j) liés par la relation $k=i+j$:

$$P(Z=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i,Y=j)$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, on a:

$$P(Z=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

Exemple:

- On lance deux dés. On veut déterminer la distribution de la somme des résultats.
- Soient X et Y les v.a. correspondantes aux résultats du 1er et 2ème dé respectivement.
- On a: $$P(X=i)=\frac{1}{6};\ i=1,2,\cdots,6$$

et $$P(X=j)=\frac{1}{6};\ j=1,2,\cdots,6$$

Exemple (suite):

La distribution de Z est:

$$P(Z=k)=\sum_{i+j=k} P(X=i,Y=j)$$

Comme les 2 résultats sont indépendants, on a:

$$P(Z=k)=\sum_{i+j=k} P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

La variable Z prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 avec les probabilités:

$$P(Z=2)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$P(Z=3)=P(X=1)\cdot P(Y=2)+P(X=2)\cdot P(Y=1)=\frac{2}{36}$$

$$P(Z=4)=P(X=1)\cdot P(Y=3)+P(X=2)\cdot P(Y=2)+P(X=3)\cdot P(Y=1)$$

$=\frac{3}{36}.$ De la même façon, on trouve:

$P(Z=5)=\frac{4}{36}$; $P(Z=6)=\frac{5}{36}$; $P(Z=7)=\frac{6}{36}$; $P(Z=8)=\frac{5}{36}$

$P(Z=9)=\frac{4}{36}$; $P(Z=10)=\frac{3}{36}$; $P(Z=11)=\frac{2}{36}$

et $P(Z=12)=\frac{1}{36}$

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. continues:

Une v.a. à deux dimensions $Z=(X,Y)$ est dite continue s'il existe une application $f(x,y)$ appelée densité de probabilité conjointe du couple de v.a.(X,Y), vérifiant:

$$a)\quad f(x,y)\geq 0;\ \forall (x,y)\in IR^2$$

$$b)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$$

Fonction de répartition d'un couple de v.a. continues:

- La fonction de répartition du couple (X,Y) est définie par:

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$$

et l'on a $$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Lois marginales (Fonctions de répartitions marginales):

- Les fonctions:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dvdu$$

et $F_Y(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dudv$ sont dites fonctions de répartition marginales des v.a. X et Y respectivement.

Lois marginales (Fonctions de densités marginales):

- Les fonctions:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv$$

et

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)du$$

sont les densités de probabilités marginales de X et Y respectivement.

Lois conditionnelles:

- La densité conditionnelle de X si $Y=y$ est définie par:

$$f_X(x/Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad si \quad f_Y(y) \neq 0$$

- La densité conditionnelle de Y si $X=x$ est définie par:

$$f_Y(y/X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad si \quad f_X(x) \neq 0$$

Indépendance de deux variables aléatoires continues :

Deux v. a. continues X et Y sont dites indépendantes si: $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x).P(Y \leq y)$; pour tout x et y

ou $F(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$

ou encore, en dérivant 2 fois par rapport à x et à y:

$$f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Dans ce cas $$f_X(x/Y = y) = f_X(x)$$

et $$f_Y(y/X = x) = f_Y(y)$$

Exemple:

Un couple de variables aléatoires continues $Z=(X,Y)$ de densité de probabilité conjointe:

$$f(x,y) = \begin{cases} kxye^{-(x^2+y^2)} & \text{si } x>0 \text{ et } y>0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

1. Trouver le coefficient k.
2. Trouver les lois marginales de X et Y.
3. Calculer les densités conditionnelles de X sachant $Y=y$ et de Y sachant $X=x$.

Corrigés:

1. La fonction $f(x,y)$ est une densité de probabilité

si $f(x,y) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$. D'une part $k \geq 0$ et

d'autre part $k\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} xye^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = 1$. On a donc

$k\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx\int_{0}^{+\infty} ye^{-y^2}dy = \frac{k}{4}$ et par suite $k=4$.

2. Les densités marginales sont: $f_X(x)=0$ si $x \leq 0$ et

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 4\int_{0}^{+\infty} xye^{-(x^2+y^2)}dy = 2xe^{-x^2}$ si $x>0$.

On a donc

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De même on trouve

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

3. La densité conditionnelle de X sachant $Y=y$ est:

$$f_X(x/Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2xe^{-x^2} & si\ x>0\\ 0 & si\ x\leq 0\end{cases}$$

La densité conditionnelle de Y sachant $X=x$ est:

$$f_Y(y/X=x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}2ye^{-y^2} & si\ y>0\\ 0 & si\ y\leq 0\end{cases}$$

On remarque que les deux v.a. X et Y sont indépendants puisque $f_X(x/Y=y)=f_X(x)$ et $f_Y(y/X=x)=f_Y(y)$. On a, aussi

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

83

Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

Soit $Z=X+Y$. On veut déterminer la fonction de répartition $F_Z(z)$ de la v.a. Z

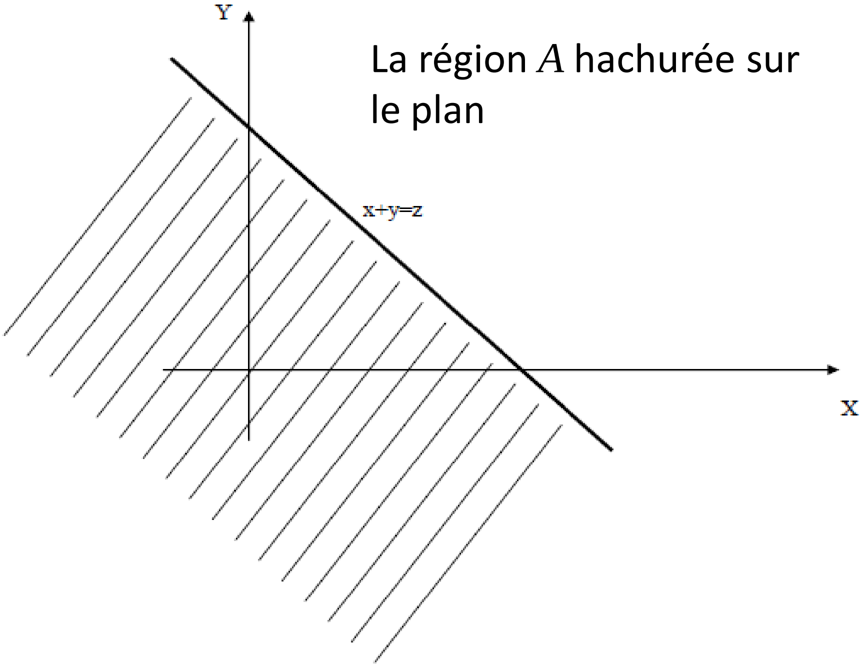
On a:

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

où

$$A=\{(x,y)\in IR^2\ /\ x+y\leq z\}$$

84



La région A hachurée sur le plan

Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

Si X et Y sont indépendantes, on a:

$$F_Z(z) = \iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right]dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,dy\right] f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x)\, f_X(x)\,dx$$

Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

- On peut trouver de la même façon:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\, f_Y(y)dy$$

- En dérivant $F_Z(z)$ par rapport à z on trouve:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)dy$$

ou encore

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)dx$$

Exemple:

Deux v.a. indépendantes X et Y ont pour densités marginales respectives:

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & si\ \ x \geq 0 \\ 0 \ \ si\ \ x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} be^{-by} & si\ \ y \geq 0 \\ 0 \ \ si\ \ y < 0 \end{cases}$$

1. Trouver la fonction de répartition conjointe de X et Y.
2. Trouver la densité de probabilité de la somme $Z=X+Y$.
3. Calculer $P(X>1,Y<1)$ et $P(X<Y)$.
4. Calculer $P\left(\frac{X}{Y} < z\right)$
5. Calculer la densité de la v.a. $Z = \frac{X}{Y}$

Solution:

1. On a: $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} abe^{-au-bv}dvdu$

$$=\left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right)$$

et

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right) & \text{si } x\geq 0 \text{ et } y\geq 0\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$$

2. La densité de Z s'écrit:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{\substack{x\geq 0\\ z-x\geq 0}} ae^{-ax}be^{-b(z-x)}dx$$

Si z≥0, on a: $f_Z(z)=\int_0^z abe^{-bz}e^{-(a-b)x}dx=\frac{ab}{a-b}\left(e^{-bz}-e^{-az}\right)$

Pour $a\neq b$,

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{ab}{a-b}\left(e^{-bz}-e^{-az}\right) & si\ \ z\geq 0\\ 0 & si\ \ z<0\end{cases}$$

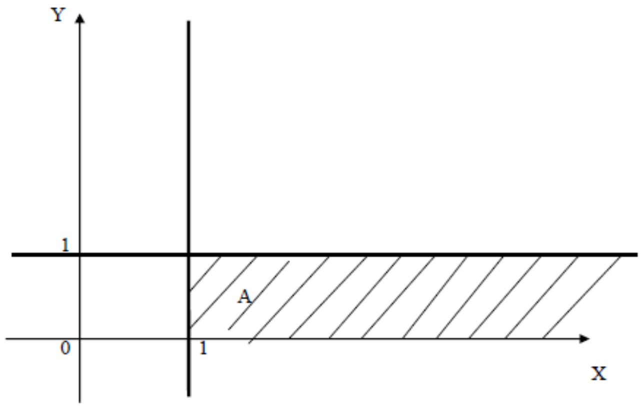
Pour $a=b$, $f_Z(z)=\int_0^z a^2e^{-az}dx=a^2ze^{-az}\quad si\ \ z\geq 0$

et on a donc

$$f_Z(z)=\begin{cases}a^2ze^{-az} & si\ \ z\geq 0\\ 0 & si\ \ z<0\end{cases}$$

3. On calcule $P(X>1,Y<1)=\iint_A f(x,y)dxdy$ où

$$A=\{(x,y)\in IR^2 / x>1 et\, y<1\}$$



$$P(X>1,Y<1)=\int_1^{+\infty}\left(\int_0^1 be^{-by}dy\right)ae^{-ax}dx$$

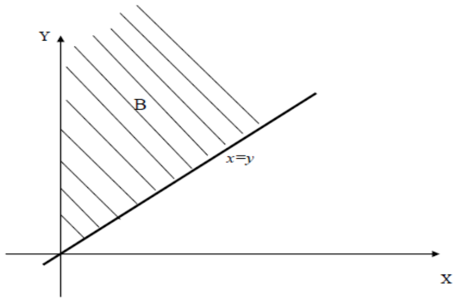
$$=\int_1^{+\infty}(1-e^{-b})ae^{-ax}dx$$

$$=(1-e^{-b})e^{-a}$$

- On a $$P(X<Y)=\iint_B abe^{-ax}e^{-by}\,dydx$$

où

$$B=\{(x,y)\in IR^2 \,/\, x<y\}$$

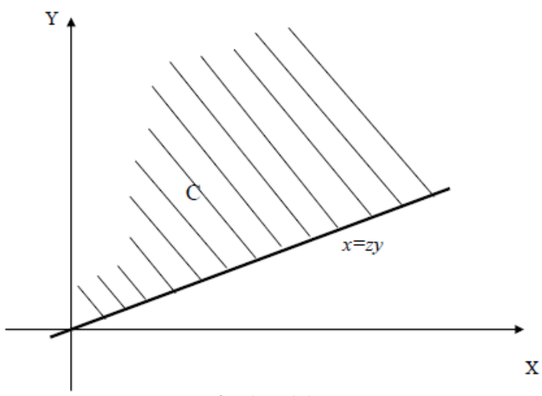


$$P(X<Y)=\int_0^{\infty} a\left(\int_x^{\infty} be^{-by}dy\right)e^{-ax}dx=\int_0^{\infty} ae^{-(a+b)x}dx=\frac{a}{a+b}$$

4. On calcule $P\left(\frac{X}{Y}<z\right)=\iint_C f(x,y)dxdy$

où

$$C=\left\{(x,y)\in IR^2 \,/\, \frac{x}{y}<z\right\}$$



$$P\left(\frac{X}{Y}<z\right)=\int_0^{\infty} a\left(\int_{\frac{x}{z}}^{\infty} be^{-by}dy\right)e^{-ax}dx=\int_0^{\infty} ae^{-\left(a+\frac{b}{z}\right)x}dx=\frac{az}{az+b}$$

5. On a:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X}{Y}\le z\right)=\iint_C f(x,y)dydx$$

où z est fixé.

Comme $P\left(\frac{X}{Y}<z\right)=\frac{az}{az+b}=F_Z(z)$, la densité $f_Z(z)$ de $Z=\frac{X}{Y}$ est donnée, pour zЄ]0,∞[, par

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{a(az+b)-a^2z}{(az+b)^2}=\frac{ab}{(az+b)^2}$$

Changement de variables:

- Soient deux v.a. X et Y continues. La densité du couple (X,Y) est $f(x,y)$. On considère la transformation $U=U(X,Y)$ et $V=V(X,Y)$ et la transformation inverse $X=X(U,V)$ et $Y=Y(U,V)$.
- La fonction de densité de probabilité du couple (U,V) est:

$$g(u,v)=f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|$$

Changement de variables:

$$g(u,v) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = f\left[x(u,v),y(u,v)\right]|J|$$

- Où J est le déterminant de Jacobi ou le Jacobien:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

97

Exemple 1:

- A l'aide de la formule précédente on peut démontrer la formule de calcul de la densité de probabilité de $Z=X+Y$ où X et Y sont deux v.a. indépendantes continues.
- En effet, comme on a $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ et en considérant la transformation

$$\begin{cases} x = x \\ z = x + y \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = x \\ y = z - x \end{cases}$$ on obtient:

Prof. Mohamed El Merouani 98

Exemple 1:

$$g(x,z)=f(x,z-x)\left|J\right|=f_X(x)\,f_Y(z-x)$$

où

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1$$

La fonction $h(z)$ densité de probabilité de Z s'écrit, donc:

$$h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx$$

Exemple 2:

- Soient X et Y deux v.a. indépendantes dont la densité de probabilité du couple (X,Y) est $f(x,y)$. Trouver la densité de probabilité $Z=XY$.
- On considère la transformation:

$$\begin{cases} x=x \\ z=xy \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x=x \\ y=\dfrac{z}{x} \end{cases}$$

- Pour x≠0, on a: $g(x,z)=f\left(x,\dfrac{z}{x}\right)\left|J\right|$

Exemple 2:

où $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$

On a, donc, $g(x,z) = f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\left|\frac{1}{x}\right|$

et la densité de Z s'écrit:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{x}\right| f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx \quad \blacksquare$$

Exercice à faire!

Soient deux v.a. X et Y dont la densité de probabilité conjointe est donnée par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & \text{si } 0 < x < 2,\ 1 < y < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Trouver la densité de probabilité de $Z=2X+Y$
2. Trouver la densité de probabilité du couple (U,V) où $U=XY$ et $V=XY^2$.

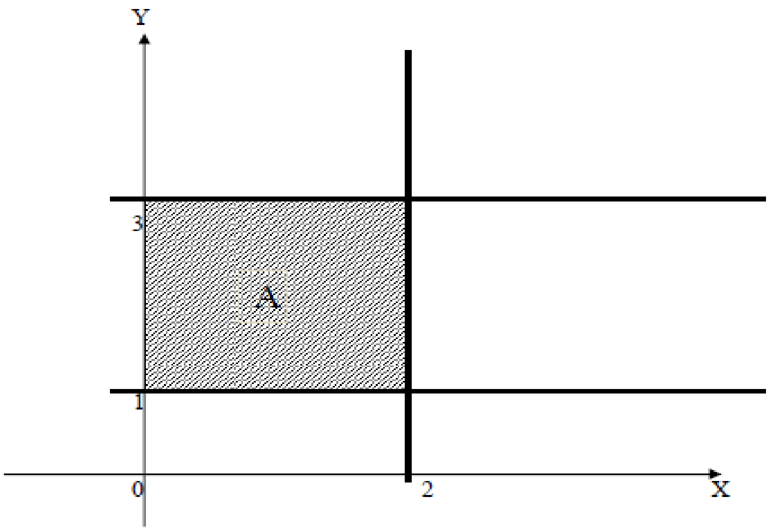
Corrigés:

1. On considère la transformation $\begin{cases} x = x \\ z = 2x + y \end{cases}$

ou $\begin{cases} x = x \\ y = z - 2x \end{cases}$

On a $g(x,z) = f(x, z-2x)|J|$ où $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

L'ensemble $A = \{(x,y) \in IR^2 / 0 < x < 2,\ 1 < y < 3\}$
correspond à $B = \{(x,z) \in IR^2 / 0 < x < 2, 1 < z - 2x < 3\}$



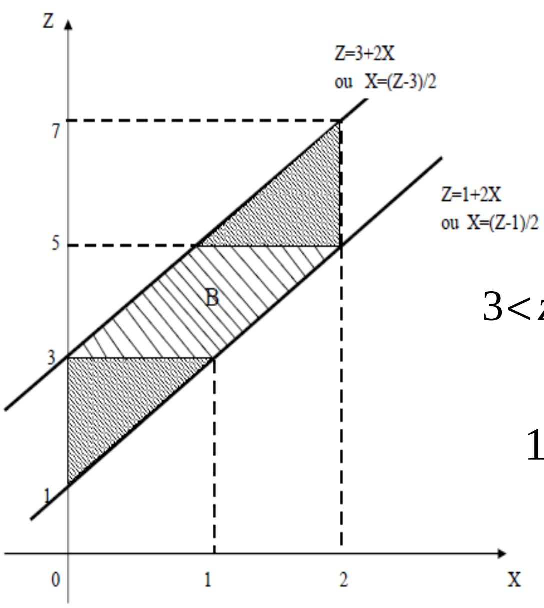
- On obtient, donc,

$$g(x,z)=\begin{cases}\dfrac{x(z-2x)}{8} & \text{si } 0<x<2;\ 1<z-2x<3\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

- La densité de Z sera:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx$$

- Alors, il faut distinguer les cas pour z et déterminer les bornes de l'intégrale pour x:



$$5<z<7 \Rightarrow \frac{z-3}{2}<x<2$$

$$3<z<5 \Rightarrow \frac{z-3}{2}<x<\frac{z-1}{2}$$

$$1<z<3 \Rightarrow 0<x<\frac{z-1}{2}$$

- Donc

$$g(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\frac{z-1}{2}} \frac{x(z-2x)}{8}\,dx\ ; & 1<z<3\\ \displaystyle\int_{\frac{z-3}{2}}^{\frac{z-1}{2}} \frac{x(z-2x)}{8}\,dx\ ; & 3<z<5\\ \displaystyle\int_{\frac{z-3}{2}}^{2} \frac{x(z-2x)}{8}\,dx\ ; & 5<z<7\\ 0 & ;\ ailleurs\end{cases}$$

- D'où

$$g(z)=\begin{cases}\frac{1}{192}\left(z^3-3z+2\right); & 1<z<3\\ \frac{1}{192}\left(24z+16\right); & 3<z<5\\ \frac{1}{192}\left(-z^3+75z-182\right); & 5<z<7\\ 0 & ;\ ailleurs\end{cases}$$

2. Soit la transformation $\begin{cases} U = XY \\ V = XY^2 \end{cases}$ ou

$$\begin{cases} X = \dfrac{U^2}{V} \\ Y = \dfrac{V}{U} \end{cases}$$

L'ensemble $A = \{(x,y) \in IR^2 \,/\, 0 < x < 2,\ 1 < y < 3\}$

correspond à

$$C = \left\{(u,v) \in IR^2 \,/\, 0 < \frac{u^2}{v} < 2,\ 1 < \frac{v}{u} < 3\right\}$$

ou

$$C = \{(u,v) \in IR^2 \,/\, u^2 < 2v,\ u < v < 3u\}$$

et on a: $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J|$

où $$J = \begin{vmatrix} \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

On obtient, donc,

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\dfrac{u^2}{v}\dfrac{v}{u}\dfrac{1}{v}; & u^2 < 2v,\ u < v < 3u \\ 0\ ; & ailleurs \end{cases}$$

ou

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{u}{8v}; & u^2 < 2v,\ u < v < 3u \\ 0\ ; & ailleurs \end{cases}$$

Propriétés de l'espérance:

Soient X et Y deux v. a., et α et β deux réels quelconques, alors:

$$1°)\ E(\alpha)=\alpha$$

$$2°)\ E(X+\alpha)=E(X)+\alpha$$

$$3°)\ E(\alpha X)=\alpha E(X)$$

$$4°)\ E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$5°)\ E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

$$6°)\ E(X-E(X))=0$$

111

Démonstration:

$$1°)\ E(\alpha)=\alpha ?$$

La moyenne d'une constante est elle-même!

$E(\alpha)=\alpha.P(X=\alpha)=\alpha.1=\alpha$

$$2°)\ E(X+\alpha)=E(X)+\alpha ?$$

Cas discret: $E(X+\alpha)=\sum_i (x_i+\alpha)\cdot P(X=x_i)$

$$E(X+\alpha)=\sum_i x_i\cdot P(X=x_i)+\alpha\sum_i P(X=x_i)$$

$$E(X+\alpha)=E(X)+\alpha$$

Cas continu:

$$E(X+\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+\alpha)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx+\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=E(X)+\alpha$$

112

Démonstration:

3°) $E(\alpha X) = \alpha E(X)$?

Cas discret:

$$E(\alpha X) = \sum_i \alpha x_i P(X = x_i) = \alpha \sum_i x_i P(X = x_i) = \alpha E(X)$$

Cas continu:

$$E(\alpha X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha x f(x) dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \alpha E(X)$$

Démonstration:

4°) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$?

Cas discret:

$$E(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$E(X+Y) = \sum_i x_i \left(\sum_j P(X = x_i, Y = y_j) \right) + \sum_j y_j \left(\sum_i P(X = x_i, Y = y_j) \right)$$

Mais, $\sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)$

et $\sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = P(Y = y_j)$

$$\sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = P\left[\bigcup_j ((X = x_i) \cap (Y = y_j))\right]$$

$$= P\left[(X = x_i) \cap \left(\bigcup_j (Y = y_j)\right)\right]$$

$$= P[(X = x_i) \cap \Omega]$$

$$= P(X = x_i)$$

Démonstration:

- On obtient, donc,

$$E(X+Y) = \sum_i x_i P(X = x_i) + \sum_j y_j P(Y = y_j)$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Démonstration:

4°) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$?

Cas continu:

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\right]dy$$

$$=E(X)+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y)$$

Démonstration:

5°) $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$?

$E(X\text{-}Y)=E(X+(\text{-}Y))=E(X)+E(\text{-}Y)=E(X)\text{-}E(Y)$

6°) $E(X-E(X))=0$

$E(X\text{-}E(X))=E(X)\text{-}E(E(X))=E(X)\text{-}E(X)=0$

Propriété (Théorème de transfert):

- **X v.a. discrète:**

Si $Y=\varphi(X)$, alors $E(Y)=\sum_i \varphi(x_i)P(X=x_i)$

- **X v.a. continue:**

Si $Y=\varphi(X)$, alors $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$

Démonstration:

- **X v.a. discrète:**

$$E(Y)=E(\varphi(X))=\sum_j y_j P(\varphi(X)=y_j)$$

Où $\varphi(X)(\Omega)=\{y_1,y_2,\ldots,y_j,\ldots\}$.

Pour j fixé, soit $\varphi^{-1}(y_j)$. On a $\varphi^{-1}(y_j) \subset X(\Omega)$.

On note $\varphi^{-1}(y_j)=\{x_i/i \in I_j\}$, ensemble des x_i ayant même image y_j;

D'où $$E(\varphi(X))=\sum_j y_j \sum_{i\in I_j} P(X=x_i)$$
$$=\sum_j \sum_{i\in I_j} y_j P(X=x_i)$$

Démonstration:

- Donc

$$E(\varphi(X)) = \sum_j \sum_{i \in I_j} \varphi(x_i) P(X = x_i)$$

- Mais, dans un cas général, certaines des valeurs $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$,…, $\varphi(x_i)$,…coïncident.
- En regroupant les x_i ayant même image y_j, c'est-à-dire les valeurs qui coïncident et en additionnant leur probabilité, on a:

$$E(Y) = \sum_i \varphi(x_i) P(X = x_i)$$

■

Exemple:

- Soit X v.a. discrète de loi de probabilités:

x_i	-3	0	3
p_i	1/4	1/2	1/4

- En posant $Y=X^2$, d'après la propriété précédente, on a:

$$E(Y) = \sum_i \varphi(x_i) p_i = (-3)^2 \frac{1}{4} + 0^2 \frac{1}{2} + (3)^2 \frac{1}{4} = \frac{9}{2}$$

Exemple (suite):

- Mais, on peut aussi écrire la loi de Y:

yj	0	9
p_j	1/2	1/2

- Dans cet exemple, on a $\varphi^{-1}(0)=0$, $\varphi^{-1}(\{9\})=\{-3,3\}$

$$E(Y) = 0\frac{1}{2} + 9\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}$$

Démonstration:
(Théorème de transfert)

- Dans le cas où X v.a. continue:

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Exemple:

- Soit X une v.a. continue de densité de probabilité:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1 - x^2\right); & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \ ; & \text{autrement} \end{cases}$$

- Trouver $E(X^2)$.

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\left(1 - x^2\right) dx = \frac{1}{5}$$

Propriété:

- Si deux v.a. X et Y sont **indépendantes**, alors on a:

$$E(XY)=E(X).E(Y)$$

En effet, si X et Y sont discrètes, alors:

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$
$$= \sum_i \sum_j x_i y_j P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right)$$

Car X et Y sont indépendantes.

Propriété (suite):

- On en tire

$$E(XY)=\sum_i\left[x_iP(X=x_i)\sum_j y_jP(Y=y_j)\right]$$
$$=\sum_i x_iP(X=x_i)E(Y)$$
$$=E(X)E(Y)$$

- Si X et Y sont continues:

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(xf_X(x)\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy\right)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(xf_X(x)E(Y))dx$$
$$=E(X)E(Y) \quad \blacksquare$$

Remarque:

- La réciproque est fausse: $E(XY)=E(X)E(Y)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y.

Exemple:

- On considère le couple de v.a. (X,Y) de loi:

$Y \backslash X$	-3	0	3	$P(Y=y_j)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$P(X=x_i)$	1/4	1/2	1/4	1

Exemple (suite):

On a $E(X) = -3\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 0$; $E(Y) = -1\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0$

et $E(XY) = (-1)(-3)0 + (-1)0\frac{1}{4} + (-1)3\times 0 + 0(-3)\frac{1}{4} + 0\times 0\times 0 +$

$$+ 0\times 3\frac{1}{4} + 1(-3)\times 0 + 1\times 0\frac{1}{4} + 1\times 3\times 0 = 0$$

Mais, l'égalité $E(XY) = E(X)E(Y)$

n'entraine pas l'indépendance de X et Y. Il suffit de vérifier, par exemple, que:

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{4} \neq P(X = 0)\cdot P(Y = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

131

Variance:

- On définit une mesure de dispersion de X autour de son espérance mathématique, dite variance de X.
- La variance d'une v.a. X, notée $Var(X)$ est définie par:

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

- Ou encore:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

#La vérification de cette dernière formule sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

132

Écart-type:

- L'écart-type d'une variable aléatoire X, noté σ(X), est défini comme la racine carrée de sa variance,

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Exemple:

- On lance un dé. On a:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, \cdots, 6$$

et $E(X) = 3{,}5$

La variance Var(X) de X sera égale à

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

$$= 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} - (3{,}5)^2 = 2{,}92$$

et $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2{,}92} = 1{,}71$

Propriétés:

#La démonstration de ces propriétés sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

$\forall a, b \in IR$, on a :

1) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

2) $E\left((X-c)^2\right)$ est minimum quand $c = E(X)$

3) Si X et Y sont indépendantes, alors

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

4) Si X et Y sont indépendantes, alors

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Variable centrée réduite:

- Si X est une v.a. non nulle, on appelle variable centrée réduite associée à X la v.a. Z définie par:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

- On a $E(Z)=0$ et $Var(Z)=1$.

Variable centrée réduite:

- En effet,

$$E(Z)=E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right)=\frac{E(X-E(X))}{\sigma(X)}=\frac{E(X)-E(X)}{\sigma(X)}=0$$

$$Var(Z)=Var\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right)=$$

$$=Var\left(\frac{X}{\sigma(X)}-\frac{E(X)}{\sigma(X)}\right)=\frac{1}{\sigma^2(X)}Var(X)=1$$

Moments (Cas discrèt):

- Moment d'ordre k d'une v.a. discrète X, noté m_k est:

$$m_k=E\left(X^k\right)=\sum_i x_i^k P\left(X=x_i\right)$$

- Moment centré d'ordre k d'une v.a. discrète X, noté μ_k est:

$$\mu_k=E\left((X-E(X))^k\right)=\sum_i (x_i-E(X))^k P\left(X=x_i\right)$$

Moments (Cas continu):

- Moment d'ordre k d'une v.a. continue X, noté m_k est:

$$m_k = E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

- Moment centré d'ordre k d'une v.a. X, noté μ_k est:

$$\mu_k = E\left((X - E(X))^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x)dx$$

Remarques:

- La variance correspond au moment centré d'ordre 2: $Var(X)=\mu_2$
- Comme pour l'espérance mathématique, si la série ou l'intégrale correspondante diverge, les moments peuvent parfois ne pas exister.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

- Soit X une v.a. telle que $E(X)$ et $Var(X)$ existent. Pour tout réel ε>0, on a:

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Covariance de deux variables aléatoires:

- La covariance entre deux v. a. X et Y, notée $Cov(X,Y)$, est définie par $Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
  ou encore $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- **Cas discrèt:**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\,y_j\,P(X=x_i\,,Y=y_j)-E(X)E(Y)$$

- **Cas continue:**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,y\;f(x,y)\,dx\,dy-E(X)E(Y)$$

Propriétes:

- Soient X et Y deux v. a. La covariance est une forme bilinéaire symétrique:

1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2) $Cov(X+Y, Z)=Cov(X, Z)+Cov(Y, Z)$

3) $Cov(\lambda X,Y)=\lambda Cov(X,Y)$

#La démonstration de cette propriété sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Propriétes:

- Si les variables X et Y sont indépendantes, alors
  $\boldsymbol{E(XY)=E(X)E(Y)}$
  et par suite $\boldsymbol{Cov(X,Y)}=0$
- La réciproque n'est cependant pas vraie.

Remarque:

Pour $X=Y$, on retrouve la variance de X comme covariance de (X, X):

$$Cov(X, X)=E[(X-E(X))(X-E(X))]$$
$$=E[(X-E(X))^2]=Var(X)$$

Exemple déjà vu:

- Soit le couple de v.a. (X,Y) de loi:

$Y \backslash X$	-3	0	3	$P(Y=y_j)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$P(X=x_i)$	1/4	1/2	1/4	1

Exemple (suite):

On a vu que $E(X)=0$; et $E(Y)=0$

et $E(XY)=0$

D'où $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

Mais, X et Y comme on l'a déjà vu ne sont pas Indépendantes . Il suffit de vérifier, par exemple, que:

$$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{4}\neq P(X=0)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

Propriétes:

- On a: $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

- Si les variables X et Y sont **indépendantes**, alors, on retrouve:
  $\boldsymbol{Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)}$ **,** résultat déjà vu.

Coefficient de corrélation entre deux v. a. :

- Le coefficient de corrélation entre deux v. a. X et Y, de variances non nulles, noté $\rho(X,Y)$ est définie par:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- Le coefficient de corrélation varie entre -1 et 1:

$$-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Inégalité de Schwartz:

- On a: $\left|E(XY)\right| \leq \sqrt{E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)}$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Fonction génératrice des moments:

- La fonction génératrice des moments est définie pour toute v.a. X par:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X = x) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Si $E(e^{tX})$ existe dans un voisinage de l'origine.

Théorème:

Si $M(t)$ existe pour $t \in \,]-t_0,t_0[$, $t_0>0$, alors ses dérivées de tout ordre existent pour $t=0$

et de plus $M^{(k)}(0)=E(X^k)$, $k = 0,1,2,\ldots$

<u>C'est-à-dire que:</u>

Tout les moments d'ordre k peuvent être calculés à l'aide des dérivées de $M(t)$ au point $t=0$.

- En effet, $M'(t) = \frac{d}{dt} E\left(e^{tX}\right)$

<u>Si X est discrète:</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx} P(X=x)\right] = \sum_x \frac{d}{dt} e^{tx} P(X=x)$$

$$= \sum_x x e^{tx} P(X=x) = E\left(Xe^{tX}\right)$$

<u>Si X est continue:</u>

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{tx} f(x)dx = E\left(Xe^{tX}\right)$$

- En posant t=0, on a $M'(0)=E(X)$.
- De même,

$$M''(t)=\frac{d}{dt}M'(t)=\frac{d}{dt}E\left(Xe^{tX}\right)=E\left(X^2e^{tX}\right)$$

et $M''(0)=E\left(X^2\right)$

D'une façon générale, on a:

$$M^{(k)}(t)=E\left(X^ke^{tX}\right),\ k\geq 1$$

et
$$M^{(k)}(0)=E\left(X^k\right)$$

- Où encore, d'après le théorème précédent, Si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0,t_0[$, $t_0>0$, alors on peut développer $M(t)$ en série de Mc-Laurin:

$$M(t)=M(0)+M'(0)\cdot\frac{t}{1!}+M''(0)\cdot\frac{t^2}{2!}+\cdots+M^{(k)}(0)\cdot\frac{t^k}{k!}+\cdots$$

- Ainsi $E(X^k)$ est le coefficient de $\frac{t^k}{k!}$

Remarque:

- La fonction génératrice des moments $M(t)$ peut ne pas exister.
- En effet, $E(e^{tX})$ n'est pas toujours définie.

Exemple 1:

- Soit X une v.a. discrète définie par:

$$P(X=k)=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}; \qquad k=1,2,\dots$$

- Donc, on a:

$$M(t)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{tk}}{k^2}=\infty$$

Exemple 2:

- Soit X une v.a. continue de fonction de densité

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

- Donc $M(t) = \dfrac{1}{1-2t}$ pour t<1/2

$$M'(t) = \frac{2}{(1-2t)^2} \text{ et } M''(t) = \frac{8}{(1-2t)^3} \text{ pour } t<1/2$$

On en déduit $E(X)$=2, $E(X^2)$=8 et $Var(X)$=4.

Exemple 3:

- Soit X une v.a. continue de densité de probabilité la fonction $f(x)=ce^{-|x|^{\alpha}}$, 0<α<1, x∈IR, où c est une constante déterminée par la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- Pour t>0, on a: $\int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x^{\alpha}} dx = \int_0^{\infty} e^{x\left(t - x^{\alpha-1}\right)} dx$

et puisque α-1<0, $\int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x^{\alpha}} dx$ n'est pas finie pour t>0; car $e^{x\left(t-x^{\alpha-1}\right)} \underset{x\to\infty}{\sim} e^{tx}$

- D'où $M(t)$ n'existe pas!
- Pourtant,

$$E\left(|X|^n\right)=c\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^n e^{-|x|^\alpha}dx=2c\int_0^\infty x^n e^{-x^\alpha}dx$$

- Par un changement de variable $y=x^\alpha$, on obtient:

$$E\left(|X|^n\right)=\frac{2c}{\alpha}\int_0^\infty y^{\frac{n+1}{\alpha}-1}e^{-y}dy=\frac{2c}{\alpha}\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)<\infty *$$

- On remarque, donc, que même si $M(t)$ est infini, les moments peuvent être finis.

$*\Gamma$ est la fonction gamma d'Euler.

Fonction Gamma Γ d'Euler:

La fonction Γ est définie sur]0,+∞[par:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

Propriétés:

1) $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.

En effet, $$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt=(\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-2}dt=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

2) $\Gamma(1)=1$.

En effet, $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=1$

3) $\Gamma(n)=(n-1)!$

En effet, $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=$

$=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots=(n-1)!\Gamma(1)=(n-1)!$