ENSA de Tétouan 2013/2014

Corrigés de la série n° 3
TD Proba – Statistique

Exercice 1 :

On a les ensembles des valeurs des couples (X,Y) et (U,V) respectivement : $A=\{(x,y) : x\in\{-1,0,1\}, y\in\{-2,1,2\}\}$ et $B=\{(u,v) : u\in\{0,1\} ; v\in\{1,4\}\}$.

Par conséquent la loi conjointe de (U,V) est donnée par le tableau suivant :

(u,v)	Inverses : (x,y)	$P(U=u, V=v)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$1/12$
$(0,4)$	$(0,2)$; $(0,-2)$	$1/12$
$(1,1)$	$(-1,1)$; $(1,1)$	$1/3$
$(1,4)$	$(-1,2)$; $(-1,-2)$; $(1,-2)$; $(1,2)$	$1/2$

Les lois marginales de U et V sont données respectivement par :

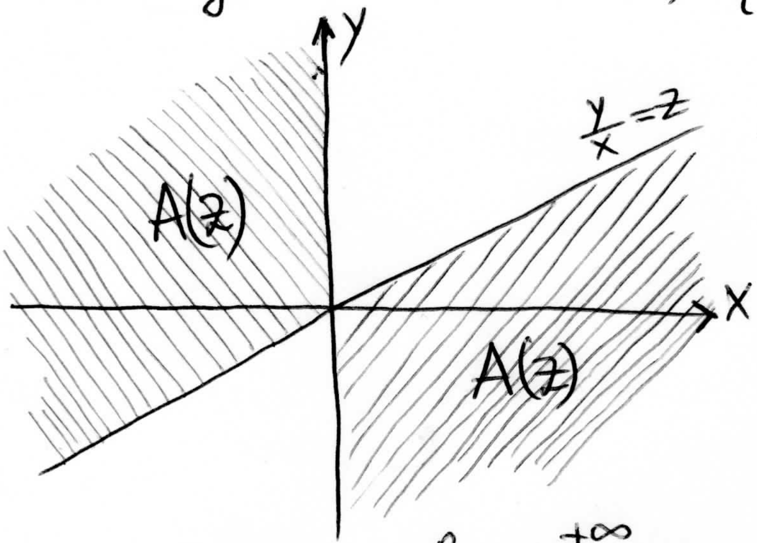
$$P(U=u) = \begin{cases} 1/6 & , u=0 \\ 5/6 & , u=1 \end{cases} \quad ; \quad P(V=v) = \begin{cases} 5/12 & , v=1 \\ 7/12 & , v=4 \end{cases}$$

Finalement ;

$V \backslash U$	0	1	$P(V=v)$
1	$1/12$	$1/3$	$5/12$
4	$1/12$	$1/2$	$7/12$
$P(U=u)$	$1/6$	$5/6$	1

Exercice 2 :

Donnons-nous une certaine valeur de z et construisons sur le plan xOy le domaine $A(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{y}{x} < z\}$ (domaine hachuré sur la représentation suivante)



- La fonction de répartition de la v.a. Z sera :

$$G(z) = \iint_{A(z)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Donc
$$G(z) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\, dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\, dy$$

En dérivant par rapport à z, on a :

$$g(z) = -\int_{-\infty}^{0} x f(x, zx)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x, zx)\, dx.$$

Si les variables aléatoires X, Y sont indépendantes, il vient

$$g(z) = -\int_{-\infty}^{0} x f_1(x) f_2(zx)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x f_1(x) f_2(zx)\, dx.$$

Exercice 3 :

Soit la transformation $\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \\ X_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2} \end{cases}$

le Jacobien de la transformation est : $J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

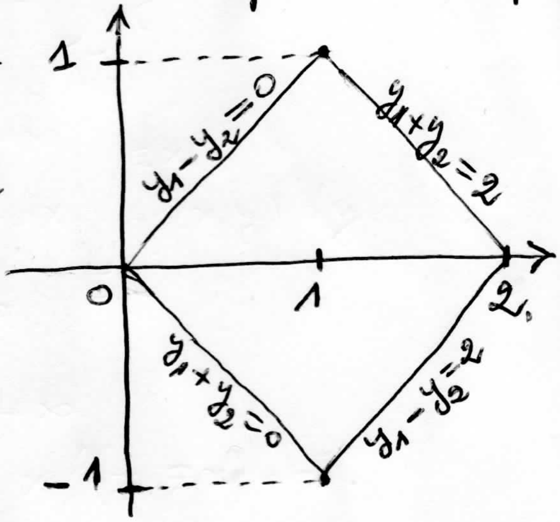
Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, la densité conjointe de (Y_1, Y_2) est :

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2} f\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \cdot f\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right) \; ; \text{ si } 0 < \frac{y_1+y_2}{2} < 1, \quad 0 < \frac{y_1-y_2}{2} < 1$$

$$= \frac{1}{2} \; ; \text{ si } (y_1,y_2) \in \{0 < y_1+y_2 < 2 \, ; \, 0 < y_1-y_2 < 2\}$$

Les densités marginales de Y_1 et Y_2 sont données respectivement par:

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-y_1}^{y_1} \frac{1}{2}\, dy_2 = y_1 & ; \; 0 < y_1 \leq 1 \\ \displaystyle\int_{y_1-2}^{2-y_1} \frac{1}{2}\, dy_2 = 2 - y_1 & ; \; 1 < y_1 < 2 \\ 0 & ; \text{ autrement} \end{cases}$$



$$f_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-y_2}^{y_2+2} \frac{1}{2}\, dy_1 = y_2 + 1 & ; \; -1 < y_2 \leq 0 \\ \displaystyle\int_{y_2}^{2-y_2} \frac{1}{2}\, dy_1 = 1 - y_2 & ; \; 0 < y_2 < 1 \\ 0 & ; \text{ autrement.} \end{cases}$$

Exercice 4 :

1°) On a, la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires lorsque ces deux v.a sont indépendantes est :

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(z - x_1)\, dx_1$$

les fonctions f_1 et f_2 étant nulles pour les valeurs négatives, l'intégrale se met sous la forme

$$g(z) = \int_0^z f_1(x_1) f_2(z-x_1)\, dx_1 = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(z-x_1)}\, dx_1$$

Donc $g(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$; $(z>0)$

2°) On note par X la somme de X_1 et X_2 ; i.e. $X = X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 ont pour densités respectives $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$.
En vertu de la formule déjà utilisée en 1°) qui donne la densité de la somme de deux v.a. indépendantes

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(x - x_1)\, dx_1.$$

Mais, on a $f_1(x_1) = 0$ pour $x_1 < 0$ et $f_2(x - x_1) = 0$ pour $x_1 > x$.

Pour $x > 0$

$$g(x) = \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (x - x_1)}\, dx_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} - 1\right]$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} ; (x>0)$$

Exercice 5 :

1°) Cherchons la fonction de répartition de la variable aléatoire Z :

$$G(z) = P(Z \leqslant z).$$

Pour que la plus grande des variables X, Y soit inférieure à z, il faut que le soit chacune d'elles.

$$G(z) = P(X \leqslant z, Y \leqslant z) = F(z, z)$$

où $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dx\, dy$

Donc $G(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} f(x,y)\, dx\, dy.$

Pour trouver la densité $g(z)$ dérivons $G(z)$ par rapport à la variable z figurant dans les bornes de l'intégrale double.

Nous la dérivons comme une fonction de deux variables z_1 et z_2 dont chacune dépend de z $(z_1 = z \; ; \; z_2 = z)$.

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\int_{-\infty}^{z_1}\left(\int_{-\infty}^{z_2} f(x,y)\,dy\right)dx\right]$$

$$= \frac{\partial G(z)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dz} + \frac{\partial G(z)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dz} = \int_{-\infty}^{z} f(z,y)\,dy + \int_{-\infty}^{z} f(x,z)\,dz$$

Dans le cas particulier où les variables X, Y sont indépendantes, $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ et on a

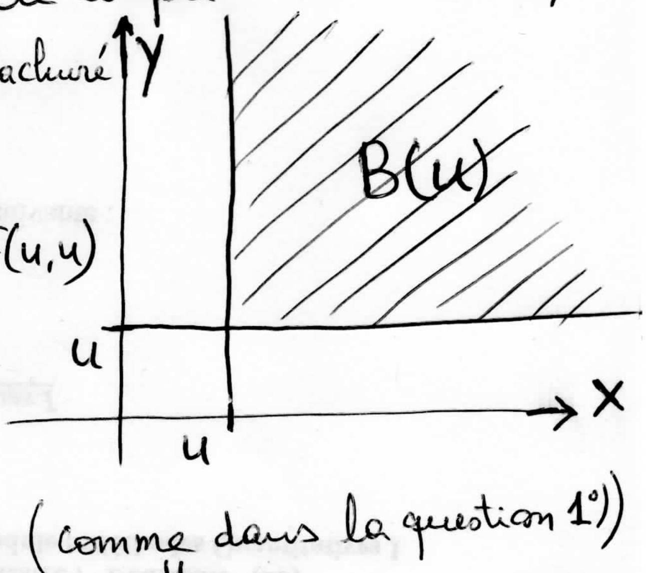
$$g(z) = f_1(z)\int_{-\infty}^{z} f_2(y)\,dy + f_2(z)\int_{-\infty}^{z} f_1(x)\,dx$$

ou encore $\quad g(z) = f_1(z)F_2(z) + f_2(z)F_1(z)$

si les variables aléatoires sont indépendantes et ont la même loi de probabilités, alors $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ et $g(z) = 2f(z)F(z)$.

2°) Cherchons le complémentaire à l'unité de la fonction de répartition $1 - G(u) = P(U > u) = P(X > u, Y > u)$

Ceci est la probabilité pour que le couple aléatoire (X,Y) tombe dans le domaine $B(u)$ hachuré



Il est claire que

$$1 - G(u) = 1 - F(u,\infty) - F(\infty,u) + F(u,u)$$

d'où $\quad G(u) = F(u,\infty) - F(\infty,u) + F(u,u)$

$$= F_1(u) + F_2(u) - F(u,u)$$

En dérivant par rapport à u, on a (comme dans la question 1°))

$$g(u) = f_1(u) + f_2(u) - \int_{-\infty}^{u} f(u,y)\,dy - \int_{-\infty}^{u} f(x,u)\,dx$$

Dans le cas où les variables X et Y sont indépendantes

$$g(u) = f_1(u)\left[1 - F_2(u)\right] + f_2(u)\left[1 - F_1(u)\right]$$

Si les variables X et Y sont indépendantes et ont la même loi de probabilités ; $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ et $g(u) = 2f(u)\left[1 - F(u)\right]$

Exercice 6 :

1°) Pour le couple $(X, -Y)$ la densité de probabilité est $f(x, -y)$; nous tirons donc de l'égalité $X - Y = X + (-Y)$

$$g(z) = G'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)\, dx$$

Si les variables X, Y sont indépendantes, il vient

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x-z)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z) f_2(y)\, dy.$$

2°) $g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x-z)\, dx$; $f_1(x)$ est différente de zéro pour $x > 0$; $f_2(x-z)$ est différente de zéro pour $x - z > 0$.

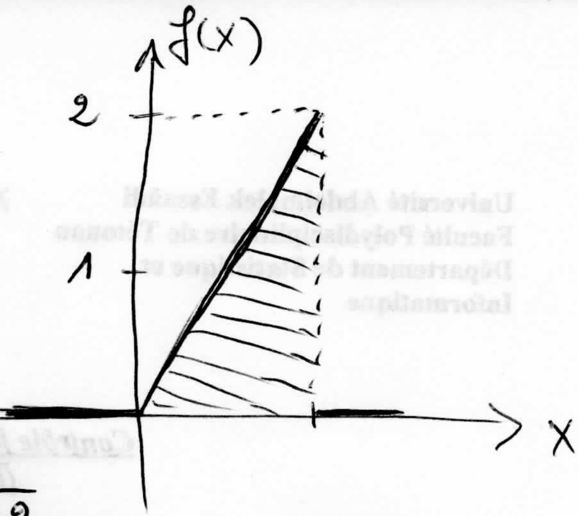
a) $z > 0$; $g(z) = \int_{z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(x-z)}\, dx = \dfrac{\lambda\mu e^{-\lambda z}}{\lambda + \mu}$

b) $z < 0$; $g(z) = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{\mu(x-z)}\, dx = \dfrac{\lambda\mu e^{\mu z}}{\lambda + \mu}$

Par conséquent

$$g(z) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda z}(\lambda+\mu)^{-1} & \text{pour } z > 0 \\ \lambda\mu e^{\mu z}(\lambda+\mu)^{-1} & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

Exercice 7 :



$$E(Y)=\int_0^1 x^2\,2x\,dx=\frac{1}{2}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$$

$$=\int_0^1 (x^2)^2\,2x\,dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$$

Exercice 8 :

$$E(Y)=\int_0^\infty e^{-x}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\int_0^\infty e^{-2x}\lambda e^{-\lambda x}\,dx-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2$$

$$=\frac{\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+1)}.$$

Exercice 9 :

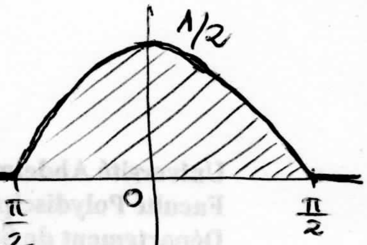
$$E(Y)=\int_0^\infty e^{x}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-1)x}\,dx$$

Pour $\lambda-1>0$; c'est-à-dire pour $\lambda>1$; cette intégrale existe, elle vaut $\frac{\lambda}{\lambda-1}$; pour $\lambda\leq 1$, elle est divergente.

$$E(Y^2)=\int_0^\infty e^{2x}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-2)x}\,dx$$

pour $\lambda>2$, cette intégrale existe et vaut $\frac{\lambda}{\lambda-2}$, ~~alors que~~ et la variance est $Var(Y)=\frac{\lambda}{\lambda-2}-\left[\frac{\lambda}{\lambda-1}\right]^2$; pour $\lambda\leq 2$ l'intégrale est divergente et la variance $Var(Y)$ n'existe pas.

Exercice 10 :



1°) $$E(Y) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = 0 \, ;$$

$$Var(Y) = E(Y^2) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}$$

2°) $$E(Y) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} |\sin x| \cos x \, dx = \int_{0}^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} |\sin x|^2 \cos x \, dx = \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \, ;$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{12}.$$

Exercice 11 :

1°) On sait que $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) \, dx$

d'où $$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(x, a) f(x) \, dx$$

Pour $x < a$, on obtient $\min(x, a) = x$

Pour $x \geq a$, on a $\min(x, a) = a$. On en tire

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{a} x f(x) \, dx + a\int_{a}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{a} x f(x) dx + a P(X > a)$$

D'une façon analogue, on trouve le moment d'ordre deux

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x) \, dx + a^2 \int_{a}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{a} x^2 f(x) \, dx + a^2 P(X > a)$$

et la variance $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \dots$

2°) $E(Y)=\sum_{k=1}^{n} \min(k,a)\, p_k$; pour $k<a$ on obtient $\min(k,a)=k$; pour $k\geqslant a$ on obtient $\min(k,a)=a$.

Alors, $$E(Y)=\sum_{k=1}^{a-1} k\, p_k + a\sum_{k=a}^{n} p_k$$

Par calcul analogue on obtient le moment d'ordre deux
$$E(Y^2)=\sum_{k=1}^{a-1} k^2 p_k + a^2\sum_{k=a}^{n} p_k$$

et la variance $$Var(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\cdots$$

Exercice 12 :

$$Y=|X| \Rightarrow Y=\begin{cases} -X & \text{pour } X<0 \\ X & \text{pour } X>0 \end{cases}$$

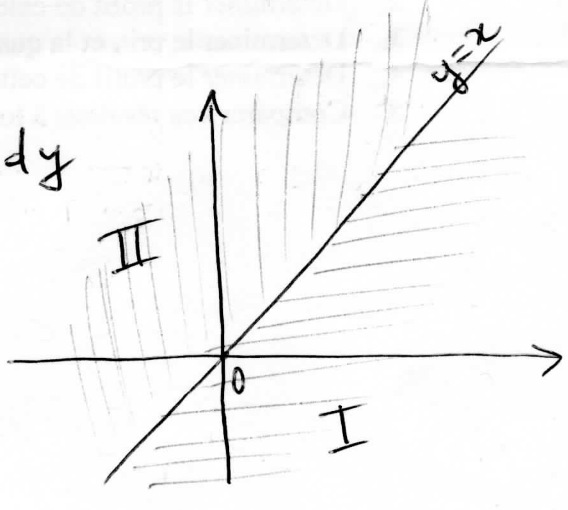
$$E(Y)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{\infty} x\left[f(x)+f(-x)\right]dx$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2 f(x)\,dx - E(Y)^2$$
$$=E(X^2)-E(Y)^2 = Var(X)+E(X)^2-E(Y)^2$$

Exercice 13 :

1°) $$E(Z)=\iint_{-\infty}^{+\infty} |x-y|\, f_1(x)\, f_2(y)\,dx\,dy$$

La droite $y=x$ divise le plan xOy en deux régions I et II $\xrightarrow{\text{voir}}$



Dans la région I , $x > y$; $|x-y| = x-y$

Dans la région II , $y > x$; $|x-y| = y-x$.

On en tire

$$E(Z) = \iint_{(I)} (x-y) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy + \iint_{(II)} (y-x) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) \left(\int_{-\infty}^{x} f_2(y)\, dy \right) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) \left(\int_{y}^{+\infty} f_1(x)\, dx \right) dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) \left(\int_{-\infty}^{y} f_1(x)\, dx \right) dy - \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) \left(\int_{x}^{+\infty} f_2(y)\, dy \right) dx.$$

Introduisons les fonctions de répartition

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\, dx \quad ; \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y)\, dy$$

Alors, $$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) F_2(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) \left[1 - F_1(y) \right] dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) F_1(y)\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) \left[1 - F_2(x) \right] dx.$$

En réunissant la 1ère intégrale avec la 4ème et la 2ème avec la 3ème, on obtient

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[2x f_1(x) F_2(x) - x f_1(x) \right] dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[2y f_2(y) F_1(y) - y f_2(y) \right] dy$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) F_2(x)\, dx - E(X) + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) F_1(y)\, dy - E(Y)$$

X et Y étant des variables aléatoires indépendantes, il vient

$$E(Z^2) = E\left[|X-Y|^2 \right] = E\left[(X-Y)^2 \right] = E(X^2) + E(Y^2) - 2E(X)E(Y)$$

$$= Var(X) + Var(Y) + \left(E(X) - E(Y) \right)^2.$$

On en tire $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \cdots$

2°)
$$Z = \begin{cases} X & \text{si } X \leq Y \\ Y & \text{si } X > Y \end{cases}$$

voir représentation en 1°)

la droite $y = x$ divise le plan xOy en deux régions : (I) où $Z = Y$ et (II), où $Z = X$ (le cas $X = Y$ n'est pas envisagé, sa probabilité étant nulle).

$$E(Z) = \iint_{(II)} x f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy + \iint_{(I)} y f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) \left[1 - F_2(x)\right] dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) \left[1 - F_1(y)\right] dy$$

où F_1, F_2 sont les fonctions de répartition des v.a. X et Y.

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) \left[1 - F_2(x)\right] dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y) \left[1 - F_1(y)\right] dy$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \dots$$

Exercice 14 :

1°) $f_1(x) = \displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\, dy\, dz$

2°) $f_{2,3}(y, z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\, dx$

3°) $f_{2,3}(y, z \mid x) = \dfrac{f(x, y, z)}{\displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\, dy\, dz} = \dfrac{f(x, y, z)}{f_1(x)}$

4°) $f_2(y / x, z) = \dfrac{f(x, y, z)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\, dy} = \dfrac{f(x, y, z)}{f_{1,3}(x, z)}$

5°) $$F(x,y,z)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

6°) $$F_1(x)=F(x,\infty,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

7°) $$F_{1,2}(x,y)=F(x,y,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Exercice 15 :

Soient $Y_1=X_1+X_2+X_3$; $Y_2=\dfrac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}$ et $Y_3=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$

alors
$$\begin{cases} x_1=y_1y_2y_3 \\ x_2=y_1y_2-x_1=y_1y_2(1-y_3) \\ x_3=y_1-y_1y_2=y_1(1-y_2) \end{cases}$$

le Jacobien de cette transformation est :
$$J=\begin{vmatrix} y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_2 \\ y_2(1-y_3) & y_1(1-y_3) & -y_1y_2 \\ 1-y_2 & -y_1 & 0 \end{vmatrix}=-y_1^2y_2$$

or $0<y_1<\infty$; $0<y_2<1$ et $0<y_3<1$

Donc, la densité conjointe de (Y_1,Y_2,Y_3) est :

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2y_2\,e^{-y_1}$$
$$=2y_2\cdot\frac{1}{2}y_1^2\,e^{-y_1}\cdot 1=f_3(y_3)\cdot f_2(y_2)\cdot f_1(y_1)$$

pour $0<y_1<\infty$; $0<y_2,y_3<1$

On en déduit que Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes. ■