ENSA de Tétouan 2013/2014

Corrigés de la série n° 4 de T. D. de Proba-Stat

Exercice 1 :

1°) Si X est une v.a. discrète :

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 P(X=x_i)$$

$$= \sum_{i\in I} (x_i-\mu)^2 P(X=x_i) + \sum_{i\in J} (x_i-\mu)^2 P(X=x_i)$$

où $I = \{ i \in \mathbb{N} / |x_i - \mu| \geq \varepsilon \}$ et J son complémentaire.

On obtient $\sigma^2 \geq \sum_{i\in I} (x_i-\mu)^2 P(X=x_i)$

Puisque on a $|x_i-\mu| \geq \varepsilon$, on peut écrire

$$\sigma^2 \geq \sum_{i\in I} (x_i-\mu)^2 P(X=x_i) \geq \varepsilon^2 \sum_{i\in I} P(X=x_i)$$

Mais comme $\sum_{i\in I} P(X=x_i) = P\left(\bigcup_{i\in I} (X=x_i)\right) = P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$

on obtient finalement $\sigma^2 \geq \varepsilon^2 P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$

d'où le résultat énoncé : $P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

Si X est une v.a. continue :

Soit $S = \{ x \in \mathbb{R} / (x-\mu)^2 \geq \varepsilon^2 \}$, alors

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \geq \int_S (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_S f(x)\,dx = \varepsilon^2 P\left[(X-\mu)^2 \geq \varepsilon^2\right]$$

D'où $P\left[|X-\mu| > \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

2°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et on considère la v.a. $aX+Y$

On a : $E\left((aX+Y)^2\right) \geqslant 0$

Mais $E\left((aX+Y)^2\right) = E\left(a^2X^2 + 2aXY + Y^2\right)$

$= a^2 E(X^2) + 2aE(XY) + E(Y^2)$

On considère le trinôme en a de signe constant (positif), son discriminant $\Delta' \leqslant 0$

$\Rightarrow \Delta' = E(XY)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leqslant 0$

On en déduit $|E(XY)| \leqslant \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.

Exercice 2 :

1°) On a : $P(X_1+X_2=k) = \sum_A P(X_1=i, X_2=j)$

où $A = \{(i,j) / 0 \leq i \leq n_1,\ 0 \leq j \leq n_2,\ i+j=k\}$

$P(X_1+X_2=k) = \sum_A P(X_1=i).P(X_2=j)$

$= \sum_A C_{n_1}^i p^i (1-p)^{n_1-i} C_{n_2}^j p^j (1-p)^{n_2-j}$

$= \sum_A C_{n_1}^i C_{n_2}^j p^{i+j} (1-p)^{n_1+n_2-i-j}$

Or $\sum_A C_{n_1}^i C_{n_2}^j = \sum_{i+j=k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1}^i C_{n_2}^j = C_{n_1+n_2}^k$

d'où $P(X_1+X_2) = C_{n_1+n_2}^k p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$.

On peut énoncer ce résultat plus simplement en affirmant que X_1+X_2 est la somme de n_1+n_2 variables de Bernoulli de même paramètre p. C'est donc bien une variable binomiale $B(n,p)$ avec $n = n_1+n_2$.

2°) $P(Z=k) = P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i) . P(Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} . e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i \lambda^{k-i}}{i!(k-i)!}$$

$$= e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\lambda^i \lambda^{k-i}}{k!} = \frac{e^{-2\lambda}}{k!} (\lambda+\lambda)^k$$

$$= (2\lambda)^k \frac{e^{-2\lambda}}{k!} .$$

Exercice 3:

1°) $M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} P(X=x)$ avec $X \sim B(n,p)$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= [pe^t + 1-p]^n = (pe^t+q)^n \text{ avec } q = 1-p$$

Donc $M(t)$ existe $\forall t \in \mathbb{R}$ et on a $M(t) = (pe^t+q)^n$.

A partir de $M(t)$, déterminons l'espérance et la variance

$$M'(t) = np e^t (pe^t+q)^{n-1} \Rightarrow M'(0) = np(p+q)^{n-1} = np$$

donc $E(X) = np$

$$M''(t) = np\left(e^t (pe^t+q)^{n-1} + e^t (n-1)(pe^t+q)^{n-2} pe^t\right)$$

$$\Rightarrow M''(0) = np(1+(n-1)p) = np + n(n-1)p^2 = np + n^2p^2 - np^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

2°) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Sa fonction génératrice des moments est :

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$= \exp(\lambda(e^t-1)).$$

A partir de $M(t)$, on peut facilement obtenir l'espérance et la variance : $M'(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t \Rightarrow M'(0) = \lambda$

d'où $E(X) = \lambda$

$$M''(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \lambda^2 e^{2t} + e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t \Rightarrow M''(0) = \lambda^2 + \lambda$$

d'où $Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

3°) $$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p q^k$$

où X suit une loi géométrique donnée par $P(X=k) = pq^k$ avec $p+q=1$; $k = 0, 1, 2, \dots$

Alors $M(t) = p \sum_{k=0}^{\infty} (qe^t)^k = \dfrac{p}{1-qe^t}$, en considérant que, dans la série géométrique, t est telle que qe^t est inférieure à 1.

On peut, maintenant, déterminer l'espérance et la variance de cette loi : $M'(t) = \dfrac{pqe^t}{(1-qe^t)^2} \Rightarrow M'(0) = \dfrac{pq}{(1-q)^2} = \dfrac{q}{p}$

d'où $E(X) = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1-p}{p}$

$$M''(t) = \frac{(1-qe^t)^2 pqe^t + pqe^t 2(1-qe^t)qe^t}{(1-qe^t)^4} \Rightarrow M''(0) = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p^2}$$

d'où $Var(X) = \dfrac{q^2}{p^2} + \dfrac{q}{p^2} - \dfrac{q^2}{p^2} = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Exercice 4 :

1°) La fonction génératrice des moments d'une loi uniforme continue sur un intervalle fini (a,b) est :

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \quad (\text{si } t \neq 0)$$

2°) Soit $X \sim N(0,1)$

$$M(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+tx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx + t^2) + \frac{t^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, e^{\frac{1}{2}t^2}\, dx$$

Posons $x - t = u$, alors $dx = du$, d'où

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \cdot e^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\right]$$

or $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 1$, donc $\underline{M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}}$; $\forall t \in \mathbb{R}$

3°) Soit $X \sim N(\mu, \sigma)$ et soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left[e^{t(\sigma Z + \mu)}\right] = e^{t\mu} E\left[e^{(t\sigma)Z}\right]$$

Alors, d'après la question précédente, on aura :

$$M_X(t) = e^{t\mu}\, e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad \text{car} \quad M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

d'où $\boxed{M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Exercice 5 :

Soit $Y = X_1 + X_2$. Nous allons calculer sa fonction génératrice des moments $M_Y(t) = E[e^{tY}]$

$$M_Y(t) = E\left[e^{t(X_1+X_2)}\right] = E\left[e^{tX_1 + tX_2}\right] = E\left[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}\right]$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on peut écrire :

$$M_Y(t) = E\left[e^{tX_1}\right] \cdot E\left[e^{tX_2}\right] = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$$

$$= e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\; e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \quad \text{(d'après l'exercice précédent)}$$

$$= e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}$$

qui est la fonction génératrice d'une loi $N\left(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$

On peut généraliser ce résultat comme suit :

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant, chacune d'elles, une loi normale $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors toute combinaison linéaire des X_i suit aussi une loi normale et on a $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2}\right)$

Exercice 6 :

1°) * On cherche d'abord la loi de X_1^2, puis on utilise un raisonnement par récurrence.

On a $X_1 \sim N(0,1)$. On pose $Z = X_1^2$.

On a $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X_1^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X_1 \leq \sqrt{z})$

$$= F_{X_1}(\sqrt{z}) - F_{X_2}(-\sqrt{z}).$$

la densité de probabilité de Z est :

$$f_1(z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}\left(f_{X_1}(\sqrt{z})-f_{X_1}(-\sqrt{z})\right)=\frac{1}{2\sqrt{z}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}z^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}$$ c'est la

densité de la loi de Khi-deux à 1 degré de liberté $(n=1)$.

* Soit $X_2 \sim N(0,1)$. On détermine maintenant la loi de $Z=X_1^2+X_2^2$. Soit $f_2(z)$ la densité de Z.

On a $$f_2(z)=\int_0^z f_1(y)f_2(z-y)\,dy=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi}\int_0^z y^{-\frac{1}{2}}(z-y)^{-\frac{1}{2}}dy.$$

En posant $y=tz$, on obtient : $$f_2(z)=\frac{e^{-z/2}}{2\pi}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{e^{-z/2}}{2\pi}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

Avec $t=\cos^2\theta$, il vient $$f_2(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi}\int_0^{\pi/2}2d\theta=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}z^{\frac{2}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}$$

c'est la densité du Khi-deux à deux degrés de liberté $(n=2)$.

* Soit $X_3 \sim N(0,1)$. On détermine la loi de $Z=X_1^2+X_2^2+X_3^2$. Soit $f_3(z)$ la densité de Z. On a :

$$f_3(z)=\int_0^z f_2(y)f_1(z-y)\,dy=\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^z(z-y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

En posant $y=tz$, on obtient :

$$f_3(z)=\frac{e^{-z/2}}{2\sqrt{2\pi}}z^{\frac{1}{2}}\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{e^{-z/2}}{\sqrt{2\pi}}z^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}z^{\frac{3}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}$$

C'est la densité du Khi-deux à trois degrés de liberté $(n=3)$.

$*$ On suppose que la v.a. $U = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2$ suit une loi du $\chi^2(n-1)$ et on montre que la v.a. $Z = U + X_n^2$ suit une loi du $\chi^2(n)$.

La densité d'une loi du $\chi^2(1)$ est $f_1(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$

celle d'une loi du $\chi^2(n-1)$ est $f_{n-1}(y) = \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$

On a alors $f_n(z) = \displaystyle\int_0^z f_{n-1}(y) f_1(z-y)\, dy$

$$= \frac{e^{-z/2}}{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{2\pi}} \int_0^z \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} (z-y)^{-\frac{1}{2}} dy$$

En posant $y = tz$, on obtient :

$$f_n(z) = \frac{e^{-z/2}\, z^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{2\pi}\; 2^{\frac{n-1}{2}-1}} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{e^{-z/2}\, z^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{2\pi}\; 2^{\frac{n-1}{2}-1}} B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{-z/2}\, z^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{2\pi}\; 2^{\frac{n-1}{2}-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \text{ car } B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

d'où $f_n(z) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-z}$ densité du $\chi^2(n)$.

Autre méthode :

On montre le résultat comme conséquence de deux autres qui sont :

(a) Si $X \sim N(0,1)$ alors $X^2 \sim \chi^2(n)$

et (b) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n v.a. indépendantes suivant chacune d'elles une loi de Khi-deux $X_i \sim \chi^2(n_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$ alors leur somme $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(\sum_{i=1}^{n} n_i)$.

* On rappelle, d'abord, que la fonction génératrice des moments d'une loi de Khi-deux à n degrés de liberté est :

$$M(t) = (1-2t)^{-n/2} \quad ; \quad \forall t < \frac{1}{2}.$$

En effet, on sait que la loi de Khi-deux à n degrés de liberté est une loi Gamma de paramètres $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

Or la fonction génératrice des moments d'une loi Gamma de paramètres α et β est $M(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$; $\forall t < \beta$

Donc, en posant $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, on obtient

$$M(t) = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{n/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2} = (1-2t)^{-n/2} \quad \forall t < \frac{1}{2}$$

* Montrons, maintenant, le résultat (b).

Sachant que la fonction génératrice des moments vérifie pour des n v.a. indépendantes

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

Alors $$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} (1-2t)^{-n_i/2} \quad ; \quad \forall t < \frac{1}{2}$$

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = (1-2t)^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{2}} \quad ; \quad \forall\, t < \frac{1}{2}$$

qui est la fonction génératrice des moments d'une loi de χ^2 à $\left(\sum_{i=1}^{n} n_i\right)$ degrés de liberté.

* le résultat (a) étant déjà démontré précédemment.

2°) Comme les v.a. X et Y sont indépendantes, la densité conjointes est le produit des densités marginales; c'est-à-dire

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} \quad \text{si } x \in \mathbb{R},\ y > 0$$

Soit le changement de variable bidimensionnel

$$(X,Y) \to (T,U) \quad \text{où} \quad T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \quad \text{et} \quad U = Y$$

Il s'agit d'une transformation injective de l'ensemble $\{(x,y) / x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ dans l'ensemble $\{(t,u) / t \in \mathbb{R},\ u > 0\}$.

En appliquant, le théorème de changement de variable : la réciproque est : $X = T\sqrt{U/n}$ et $Y = U$,

Donc le jacobien est $\begin{vmatrix} \sqrt{U/n} & T/2\sqrt{nU} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{U/n} \neq 0$

et la fonction de densité conjointe de (T,U) est :

$$g(t,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\frac{u}{2}} \sqrt{\frac{u}{n}} \quad ; \quad t \in \mathbb{R},\ u > 0$$

Pour obtenir la marginale de T, il suffit d'intégrer $g(t,u)$ par rapport à u :

$$\int_0^\infty g(t,u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\frac{u}{2}} \sqrt{u/n}\,du =$$

soit le chgt $y = u\left(1+\frac{t^2}{2}\right)/2$

$$\int_0^\infty g(t,u)\,du = \frac{1}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \int_0^\infty y^{-(n+1)/2} e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\;B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

3°) On détermine d'abord les densités $f(x)$ de $X_1 = \frac{X}{p}$ et $g(y)$ de $Y_1 = \frac{Y}{q}$.

On a $F(x) = P(X_1 \le x) = P(X \le px) = \int_0^{px} \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{p}{2}-1}\,dt$

En posant $\frac{t}{p} = u$, il vient $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2^{p/2}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} e^{-\frac{pu}{2}} (pu)^{\frac{p}{2}-1}\,du$

et $f(x) = \frac{p}{2^{p/2}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} e^{-px} (px)^{\frac{p}{2}-1}$.

La densité $g(y)$ de $Y_1 = \frac{Y}{q}$ s'obtient de la même façon.

On détermine ensuite la densité $h(z)$ de $F = \frac{X_1}{Y_1}$.

La fonction de répartition $H(z)$ de F s'écrit :

$$H(z) = P(Z \le z) = \int_0^\infty g(y)\,dy \int_{-\infty}^{zy} f(x)\,dx$$

et $h(z) = \int_0^\infty g(y) f(zy)\, y\, dy$

$$= \frac{p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}}}{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) 2^{\frac{q}{2}} \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} z^{\frac{p}{2}-1} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}(q+pz)} y^{\frac{p+q}{2}-1} dy$$

$$h(z) = \frac{p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}}}{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) 2^{\frac{q}{2}} \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} z^{\frac{p}{2}-1} \frac{2^{\frac{p+q}{2}}}{(q+pz)^{\frac{p+q}{2}}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{p+q}{2}-1} dt$$

$$= \frac{p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \frac{z^{\frac{p}{2}-1}}{(q+pz)^{\frac{p+q}{2}}} \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$= \frac{p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}}}{B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)} \frac{z^{\frac{p}{2}-1}}{(q+pz)^{\frac{p+q}{2}}}.$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} z^{\frac{p}{2}-1}}{B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)\left(1+\frac{p}{q} z\right)^{\frac{p+q}{2}}} \quad ; \quad z \geq 0$$

qui la densité d'une loi de Fisher à p et q degrés de liberté ■