Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année universitaire : 2013/2014
Filière: L.E.F. Sc. éco. et gestion
Semestre 3

Contrôle final d'Algèbre I

(Durée: 1 heure 30 min)

Exercice 1 : (2 points)
Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : (2 points)
Déterminer le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : (5 points)
On considère la matrice carrée d'ordre 3

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice C est inversible et calculer son inverse C^{-1}.
2. Soit le vecteur $b = (4, 4, 4)$. Écrire le système d'équations linéaires $CX = b$ où $X = (x, y, z)$ est le vecteur des inconnues. Résoudre, matriciellement, ce système.

Exercice 4 : (5 points)
On considère la matrice carrée d'ordre 3

$$M = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 12 \\ -3 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice M est-elle symétrique ? Pourquoi ?
2. La matrice M est-elle orthogonale ? (Justifiez votre réponse !).
3. Montrer que la matrice M est inversible et que son inverse est elle même.
4. Quel est le spectre de la matrice M ?(Justifiez votre réponse !).

Exercice 5 : (6 points)
On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres de N.
2. Chercher les sous-espaces propres de N. Dire pourquoi N est diagonalisable (par quel critère) ? Donner sa matrice de passage P et sa matrice diagonale D.

Bonne chance !

FP de Tétouan 2013/2014

Corrigés du contrôle final d'algèbre I (S_3. éco & gestion)

Exercice 1:

On développe suivant la 4ème colonne, on a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ +1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

après on développe suivant la 3ème colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Exercice 2:

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

où on a développé suivant la 1ère ligne donc

$$\det B = 2(10-7) - (30-28) + 4(3-4)$$
$$= 2\times 3 - 2 + 4\times(-1) = 0 \Rightarrow rg(A) < 3$$

On calcul, maintenant, des déterminants d'ordre 2,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2.$$

Exercice 3:

1°) $$\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

si on a développé suivant la 1ère ligne, donc

$$\det(C) = 2\times 3 - 1 - 1 = 4 \neq 0$$

d'où C est inversible

Son inverse est C^{-1} donné par la formule

$$\boxed{C^{-1} = \frac{1}{\det C}\,{}^t\mathrm{com}(C)}$$

$$\mathrm{com}(C) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathrm{com}(C) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

2°) $CX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

* sa solution est $\boxed{X = C^{-1}b}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1-1 \\ -1+3-1 \\ -1-1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

Exercice 4 :

1°) ${}^tM = M$; donc M est symétrique

2°) $${}^tM.M = \left(\frac{1}{13}\right)^2 \begin{pmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 12 \\ -3 & 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 12 \\ -3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{13}\right)^2 \begin{pmatrix} 169 & 0 & 0 \\ 0 & 169 & 0 \\ 0 & 0 & 169 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc ${}^tMM = I$

d'où M est orthogonale

3°) Comme M est orthogonale, alors elle est inversible et son inverse M^{-1} est sa transposée ${}^tM$, mais comme ${}^tM = M$, d'où $M^{-1} = M$.

4°) Pour la même raison (M est orthogonale) ses valeurs propres 1 ou -1. Son spectre est $Spec(A) \subset \{-1, 1\}$.

Exercice 5 :

1°) le polynôme caractéristique de N est donné par

$$\det(N - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda+3) = 0$$

Donc les valeurs propres de N sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -3$.

2°). • Pour $\lambda_1 = 1$, on a

$$NX = X \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = x \\ 2x - 3y + 2z = y \\ -x + 2y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y - z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 2y - x \end{cases}$$

$$E_1 = \{(2y - z, y, z) \,/\, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

ou $E_1 = \{(x, y, 2y - x) \,/\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

Alors $E_1 = \{y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \,/\, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

ou $E_1 = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2) \,/\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

• Pour $\lambda_2 = -3$ on a $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$

alors $\begin{cases} 2x - 2y + z = -3x \\ 2x - 3y + 2z = -3y \\ -x + 2y = -3z \end{cases}$, d'où $\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = -z \\ y = 2x \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad E_{-3} = \{(-z, -2z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$

ou $E_{-3} = \{(x, 2x, -x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

Alors $E_{-3} = \{z(-1, -2, 1) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$

ou $E_{-3} = \{x(1, 2, -1) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

N est diagonalisable parce que

$$\dim E_1 + \dim E_{-3} = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

ou parce que $\dim E_1 = 2$ = ordre de multiplicité de λ_1

et $\dim E_{-3} = 1$ = ordre de multiplicité de λ_2

(critère n°2).

* Sa matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ou $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

* Sa matrice diagonale est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$