Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire 2012/2013
LEF Sciences Éco. & Gestion
Semestre : Sixième (S6)
Parcours : Economie et Gestion

Contrôle final de Recherche Opérationnelle
(Durée : 1 heure 30 min)

Exercice 1 :

Une entreprise veut déménager son matériel composé de 450 machines de trois types : M_1, M_2, M_3. Elle décide de louer des camions. La société de location dispose de trois sortes de véhicules : V_1, V_2, V_3 dont les tarifs sont respectivement de 500, 800 et 1200 Dirhams pour un voyage.

Les camions V_1 peuvent chacun transporter une machine M_1, 4 machines M_2 et 10 machines M_3. Pour des raisons techniques la place d'une machine d'un type donné ne peut être utilisée pour une machine d'un autre type. Chaque camion V_2 peut transporter 2 machines M_1, 6 machines M_2 et 20 machines M_3. Alors que le véhicules V_3 a pour capacité maximum : 4 machines M_1, 20 machines M_2 et 24 machines M_3.

On veut transporter en un seul convoi 30 machines M_1, 120 machines M_2 et 300 machines M_3.

L'entreprise veut déterminer le nombre de véhicules à louer pour minimiser le coût total de transport.

Donner le modèle linéaire de ce problème sans le résoudre.

Exercice 2 :

Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode graphique :

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 3 :

1) Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode du simplexe :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \; ; \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2) Lesquelles des contraintes sont –elles saturées par la solution optimale trouvée ?

Exercice 4 :

On considère le programme linéaire suivant :

$$\text{Min } 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Résoudre ce problème linéaire.
2) Quel est l'intervalle de variation post-optimale du coût marginale de la variable x_2 ?

Bonne chance !

Exercice 1 :

Activités		Amplitudes
nombre de Véhicules V_1 à louer	$\longrightarrow$	x_1
" " V_2 "	$\longrightarrow$	x_2
" " V_3 "	$\longrightarrow$	x_3

Fonction objective :

$$\text{Min } 500x_1 + 800x_2 + 1200x_3$$

contraintes :

machines M_1 : $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 30$

machines M_2 : $4x_1 + 6x_2 + 20x_3 \geq 120$

machines M_3 : $10x_1 + 20x_2 + 24x_3 \geq 300$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$; $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$

Donc le modèle cherché est :

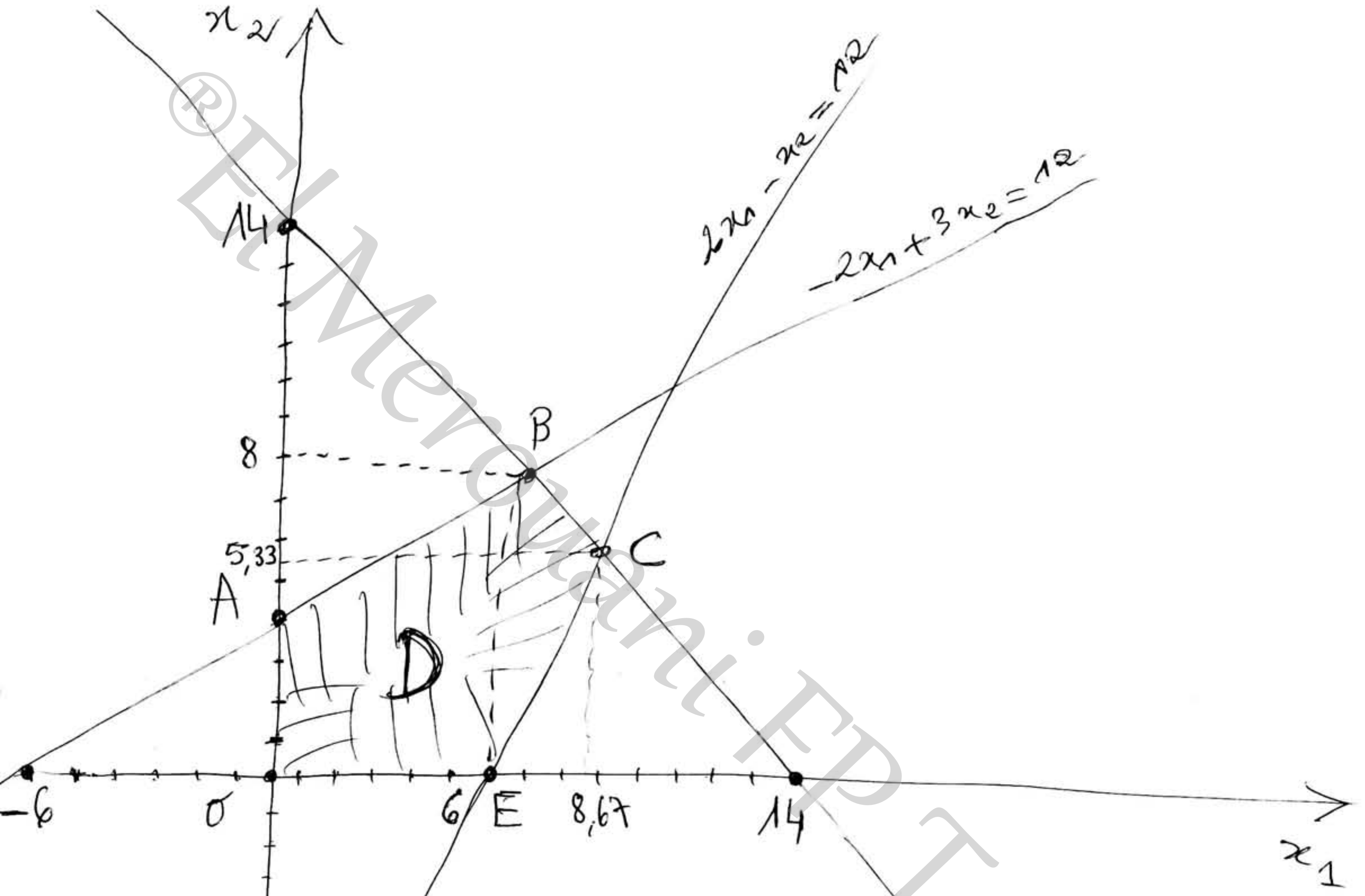
$$\text{Min } 500x_1 + 800x_2 + 1200x_3$$

$$\text{s.à} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 20x_3 \geq 120 \\ 10x_1 + 20x_2 + 24x_3 \geq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ ou même } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ex. 2 :

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. à} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 ; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$x_1 + x_2 = 14$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 14$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 14$

$-2x_1 + 3x_2 = 12$

$x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 4$

$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -6$

$2x_1 - x_2 = 12$

$x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = -12$

$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 6$

$Z_0 = 0$

$Z_A = 0 + 3 \times 4 = 12$

$Z_E = 6$

* $B(x,y)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \Rightarrow x_1 = 14 - x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 = 12 \Rightarrow -2(14 - x_2) + 3x_2 = 12 \end{cases}$

$\Rightarrow 5x_2 = 12 + 28 = 40$

$\Rightarrow x_2 = \frac{40}{5} = 8$

$x_1 = 14 - 8 = 6$

$Z_B = 6 + 3 \times 8 = 24 + 6 = 30$

* $C(x,y)$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 12 & (1) \\ x_1 + x_2 = 14 & (2) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow 3x_1 = 26 \Rightarrow x_1 = \frac{26}{3} = 8{,}67$

$\Rightarrow x_2 = 14 - \frac{26}{3} = \frac{42 - 26}{3} = \frac{16}{3} = 5{,}33$

$Z_C = \frac{26}{3} + 3 \cdot \frac{16}{3} = \frac{26 + 48}{3} = \frac{74}{3} \simeq 24{,}6$

Donc la valeur max est $Z = 30$
une sol^n optimale est $x_1 = 6$, $x_2 = 8$
c'est le point B.

Exercice 3 :

1°) La forme standard :

$$\text{Min } Z = -3x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

Sujet à
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 7 \\ x_i \geq 0 \quad ; i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

V.e

V.b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
x_4	1	1	2	1	0	0	0	4
V.s x_5	2	0	$\boxed{3}$ pivot	0	1	0	0	5
x_6	2	1	3	0	0	1	0	7
$-Z$	-3	-2	-4	0	0	0	1	0

↑

V.e

V.b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
V.s x_4	$-1/3$	$\boxed{1}$ pivot	0	1	$-2/3$	0	0	$2/3$
x_3	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
x_6	0	1	0	0	-1	1	0	2
$-Z$	$\frac{-1}{3}$	-2	0	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{20}{3}$

↑

V.b.	x_1 V.e	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
x_2	$-\frac{1}{3}$	1	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
V.s x_3	$\boxed{\frac{2}{3}}$ pivot	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
x_6	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	0	$4/3$
$-Z$	-1	0	0	2	0	0	1	8

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d
x_2	0	1	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	$3/2$
x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
x_6	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{6}$	1	0	$\frac{1}{2}$
$-Z$	0	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{21}{2}$

$x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$; $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ (H.B)

et $x_6 = \frac{1}{2}$

$Z = \frac{21}{2}$

2) La $1^{ère}$ et la $2^{ème}$ contraintes sont saturées par la solution optimale trouvée car les variables d'écarts ajoutées à ces contraintes sont nulles à l'optimum.

Exercice n° 4 :

Forme standard :

$$\text{Min } 3x_1 + 4x_2$$

sujet à $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$

1ère méthode :

Méthode des deux phases :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + t_1 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_4 + t_2 = 6$$

où t_1 et t_2 sont des variables artificielles. Soit $M = t_1 + t_2$. Or $t_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5$ et $t_2 = -2x_1 - 2x_2 + x_4 + 6$. Alors

$$M = -3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 11$$

V.b.	x_1	x_2 (V.e)	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
V.s. t_1	1	$\boxed{2}$ pivot	−1	0	1	0	0	0	5
t_2	2	2	0	−1	0	1	0	0	6
$-Z$	3	4	0	0	0	0	1	0	0
$-M$	−3	−4	1	1	0	0	0	1	−11

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
x_2	$1/2$	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	0	0	$5/2$
t_2	1	0	1	-1	-1	1	0	0	1
$-Z$	1	0	2	0	-2	0	1	0	-10
$-M$	-1	0	-1	1	2	0	0	1	-1

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	$-Z$	$-M$	T.d.
x_2	0	1	-1	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	2
x_1	1	0	1	-1	-1	1	0	0	1
$-Z$	0	0	1	1	-1	1	1	0	-11
$-M$	0	0	0	0	1	1	0	1	0

$M = 0 \Rightarrow 2^{\text{eme}}$ phase

Une solution de base réalisable est :

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$ et les autres variables étant hors base, sont nulles.

Phase II :

On élimine du dernier tableau de la phase I les variables artificielles et aussi M, on obtient

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	2
x_1	1	0	1	-1	0	1
$-Z$	0	0	1	1	1	-11

Donc, une solution optimale est : $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

$x_3 = x_4 = 0$ (variables hors base à l'optimum)

la valeur optimale est $Z = 11$

Une autre méthode :

Méthode duale :

On multiplie les contraintes par (-1), on obtient :

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = -5$$
$$-2x_1 - 2x_1 + x_4 = -6$$

D'où,

le 1er tableau de la méthode duale est :

V.b.	x_1 V.e	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_3	-1	-2	1	0	0	-5
V.s x_4	$\boxed{-2}$ pivot	-2	0	1	0	-6 ←
$-Z$	3	4	0	0	1	0

$3/_{-2} = -1{,}5$ $\quad$ $4/_{-2} = -2$

V.b.	x_1	x_2 V.e	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
V.s x_3	0	$\boxed{-1}$ pivot	1	$-1/2$	0	-2 ←
x_1	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	3
$-Z$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	1	-9

$1/_{-1} = -1$ $\quad$ $\frac{3}{2} \times -2 = -3$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	-1	$1/2$	0	2
x_1	1	0	1	-1	0	1
$-Z$	0	0	1	1	1	-11

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$ et $Z = 11$

2°) Recherche de l'intervalle de variation post-optimale de la variable x_2 :

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	-1	1/2	0	2
x_1	1	0	1	-1	0	1
$-Z$	0	δ	1	1	1	-11

La forme n'est plus canonique

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	-1	1/2	0	2
x_1	1	0	1	-1	0	1
$-Z$	0	0	$1+\delta$	$1-\frac{\delta}{2}$	1	$-11-2\delta$

$$1-\frac{\delta}{2}\geqslant 0 \Rightarrow 1\geqslant\frac{\delta}{2} \Rightarrow 0\leq\delta\leq 2$$

L'intervalle cherché est $[0,2]$